CÁLCULO Y SUS FUNDAMENTOS PARA INGENIERÍA Y CIENCIAS

DR. ANTONIO RIVERA FIGUEROA
INVESTIGADOR DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
CINVESTAV DEL IPN

PRIMERA EDICIÓN EBOOK
MÉXICO, 2014

GRUPO EDITORIAL PATRIA

Para establecer comunicación con nosotros puede hacerlo por:

correo:
Renacimiento 180, Col. San Juan Tlihuaca, Azcapotzalco, 02400, México, D.F.

fax pedidos:
(01 55) 5354 9109 • 5354 9102

e-mail:
info@editorialpatria.com.mx

home page:
www.editorialpatria.com.mx

Dirección editorial: Javier Enrique Callejas
Coordinadora editorial: Estela Delfín Ramírez
Diseño de portada: Yuri Miguel Pérez Negrete
Diseño de interiores: EG Corporación de Servicios Editoriales y Gráficos, S.A. y C.V.
Fotografías: © 2007, Jupiter Images Corporation pags. 1, 51, 87, 120, 122, 123, 197, 246, 255, 256, 291 (Johann Bernoulli), 319, 377, 424, 437, 438, 447, 489, 515, 569, 588.

Revisión técnica:
M. en C. Rosa María García Méndez
Universidad Latina

Cálculo y sus fundamentos para ingeniería y ciencias

Renacimiento 180, Colonia San Juan Tlihuaca
Delegación Azcapotzalco, Código Postal 02400, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro Núm. 43

ISBN: 978-607-438-899-2

Impreso en México
Printed in Mexico

Primera edición ebook: 2014

Esta obra se terminó de imprimir en enero del 2008
en los talleres de Overprint, S.A de C.V.
Agustín Yáñez 1253, Col, Sector Popular
C.P. 09060, México, D.F.

CONTENIDO

PRÓLOGO

El presente libro está dirigido a estudiantes y profesores de las carreras de las áreas de ciencias físico-matemáticas o ingeniería. Los requisitos previos para su lectura y su uso son haber estudiado un curso de geometría analítica y un curso elemental de cálculo diferencial e integral de nivel bachillerato; aunque quienes carezcan de esos conocimientos podrán estudiarlo parcialmente, por ejemplo, podrán leer sólo algunos capítulos o fragmentos cuidadosamente seleccionados, lo cual significa estudiar ciertos teoremas o incluso sólo comprender los enunciados de algunos de ellos y estudiar sus aplicaciones, omitiendo la lectura de sus pruebas. Todo esto es posible, sin que el hacerlo vaya en detrimento de una aceptable comprensión de las ideas matemáticas esenciales. Se puede, pues, armar con el material de este libro, un curso de cálculo para principiantes, adaptado a sus necesidades académicas.

Como se expresa en el título mismo, se trata de un libro de cálculo diferencial e integral, pero también de sus fundamentos, lo que significa que en éste se establecen las propiedades importantes de las funciones continuas, las cuales le dan sustento al cálculo. Asimismo, se prueban con detalle los resultados acerca de la derivada y la integral, desde los más simples hasta los más complicados o de gran relevancia, para lo cual se requiere de una aceptable dosis de rigor matemático.

Con una selección adecuada de temas, el libro también puede usarse en los cursos de cálculo de ingeniería o estudiarse con plenitud en una carrera de ciencias físico-matemáticas. Las instituciones de nivel universitario cuyos estudiantes posean conocimientos previos de cálculo, adquiridos en el bachillerato, y sus programas de estudio pretendan introducirlos a los fundamentos del mismo, podrán hacer una selección de contenidos del libro que se adecue a sus programas de estudio.

De igual modo, el autor espera que el libro también sea de interés para los lectores con conocimientos de cálculo que aspiren a una sólida formación matemática o para las instituciones que, desde un principio, proporcionan a sus estudiantes una formación matemática de ese corte. Sin duda, este libro resultará de gran interés para los profesores que enseñan cálculo en nivel universitario, pues aquí encontrarán todas las demostraciones de los principales resultados del cálculo, en particular las que suelen considerarse complicadas y que por lo regular se omiten en obras similares. En suma, el libro se ofrece a un amplio público y es una opción para quienes deseen iniciarse en el arte de la demostración matemática.

Cabe destacar que a lo largo de la obra se presentan algunas reflexiones sobre situaciones especiales en las que aun el lector experimentado quizá no haya reparado y que con seguridad le resultarán de gran interés. Varias de estas reflexiones son resultado de la experiencia que el autor ha acumulado con sus estudiantes en el transcurso de más de 38 años de práctica docente en la carrera de ciencias físico-matemáticas de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional, y también de la experiencia obtenida en su permanente y constante relación con profesores de matemáticas, tanto de bachillerato como de nivel profesional, que participaron en diversos programas de posgrado, formación y actualización que el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados ha ofrecido por más de tres décadas a profesores de matemáticas de esos niveles en el país.

Al planear y escribir este libro, el autor puso especial cuidado en la organización de los temas, los conceptos y los resultados, siempre teniendo en mente el orden lógico de los mismos, pero considerando a la vez que resultasen didácticos y útiles en el desarrollo de la teoría y sus aplicaciones. Para ejemplificar lo anterior refirámonos a las funciones exponenciales y el logaritmo natural. Es común que en un tratamiento riguroso del cálculo estas funciones hagan su aparición después de haberse presentado el concepto de integral definida. En un acercamiento donde

primero se estudia la derivada y después la integral, la construcción de estas importantes funciones, basada en la integral definida, resulta un poco tardía y desventajosa. La ausencia de estas funciones en el momento de presentar las definiciones y los resultados sobre la derivada y la integral, limita y empobrece la ilustración, ejemplificación o aplicación de los mismos. Sin estas funciones y las funciones trigonométricas, sólo dispondremos de la familia de funciones constituida por las polinomiales, racionales o algebraicas en general. En el caso de las funciones trigonométricas, hemos sacrificado el rigor al construirlas, pues para tal efecto utilizamos recursos geométricos, en específico el muy conocido círculo trigonométrico, debido a que carecimos de una alternativa de construcción y, por tanto, recurrimos a este recurso. De cualquier manera, el objetivo es una buena justificación: disponer de las funciones trigonométricas tempranamente en el estudio del cálculo diferencial e integral. Esto incrementó nuestro potencial para aplicar la teoría a casos interesantes. Para el caso de las funciones exponencial y el logaritmo, corrimos con mejor suerte, tuvimos éxito en salvar la construcción clásica a través de la integral, no es que esta construcción sea incorrecta, por el contrario, es rigurosa, simple y elegante, pero en nuestra opinión no resulta nada didáctica. Con esa construcción, ciertamente se definen con rigor las potencias a^b con $a > 0$ y exponente b cualquier real, en particular la función exponencial e^x, pero dista mucho de ser una construcción natural, además de que al hacerlo a través de la integral se sacrifica su conocimiento oportuno, ni siquiera nos permite usar tempranamente la función potencia x^r cuando r es un real arbitrario, así que tenemos que limitarnos a exponentes enteros o racionales.

En este libro, la construcción de la función exponencial a^x, en particular la de e^x, la hacemos en el capítulo 5. La exponencial para exponentes irracionales se obtiene como resultado de aproximaciones de exponenciales con exponentes racionales, son límites de este tipo de expresiones. En este acercamiento, la exponencial para exponentes irracionales resulta una extensión natural de la exponencial con dominio en los racionales. Para hacer esto, requerimos de propiedades de la exponencial definida sólo para exponentes racionales y un poco sobre sucesiones y sus límites, ésta fue una de las razones para presentar las sucesiones y las series casi al inicio del libro. Las propiedades establecidas para el dominio de los racionales, culminaron, vía límites, en una construcción precisa de la exponencial definida para todos los reales. Valió la pena el esfuerzo, pues redundó en el conocimiento temprano de estas importantísimas funciones del cálculo.

ACERCA DE LA OBRA

A continuación, comentaremos el contenido de los capítulos, el orden de los mismos y la razón de su existencia.

El **capítulo 1** está dedicado a los números reales. Uno de sus objetivos es que el lector conozca en qué consiste este sistema de números y que empiece a enterarse del importantísimo papel que juega en la construcción del cálculo. Esto último sólo se apreciará después de avanzar en la teoría y estudiar los capítulos 2, 3 y 5, que se refieren a las funciones y su continuidad. Las propiedades del sistema de los reales, en particular su continuidad, son las que le dan sustento al cálculo, ya que son indispensables en su desarrollo, comenzando por las definiciones. Este principio, postulado o propiedad, como quiera llamársele, es la esencia de la continuidad de las funciones, concepto indispensable en la fundamentación del cálculo. Las propiedades de las funciones continuas en intervalos cerrados y acotados, que se heredan de la continuidad de los reales, permiten, por ejemplo, probar la existencia de la integral para este tipo de funciones. En la construcción del cálculo, la continuidad empieza a ser importante desde que establecemos las reglas simples de derivación.

Antes de que Richard Dedekind escribiera sus *Ensayos sobre la teoría de números*, la continuidad de los reales se concebía sólo a través de su representación en lo que ahora llamamos "la recta real", la cual está dotada de una continuidad geométrica ideal. Esta representación era la que daba sentido a la continuidad de los reales. Sin embargo, todavía en los cursos poco rigurosos de cálculo, suele manejarse la continuidad de los reales de esa manera. Dedekind fue el primero en percatarse de la necesidad de formular en un contexto puramente aritmético esa continuidad.

En nuestro acercamiento, hemos evitado presentar a los reales como un sistema axiomático, en donde a partir de un número mínimo de propiedades, que se aceptan como postulados, es posible deducir la totalidad de ellas. También consideramos poco pertinente hacer una construcción teórica de los mismos, pues este tema queda fuera de los objetivos de este libro. En cambio, adoptamos un acercamiento simple: asumimos que por parte del lector hay plena familiaridad con las propiedades algebraicas de los reales (por tanto, no nos ocupamos de ellas), después establecemos las propiedades básicas de las desigualdades y finalmente formulamos el postulado de continuidad de los reales, el cual se establece en el capítulo 4 (que trata sobre sucesiones y sus límites), su enunciado corresponde a lo que se conoce comúnmente como teorema de Weierstrass, en el que se afirma que toda sucesión creciente y acotada superiormente es convergente. Esta propiedad de las sucesiones, que aceptamos como verdadera sin cuestionamiento alguno, es la que utilizamos en la construcción del cálculo. Con esto nos adherimos a la afirmación de Dedekind, en el sentido de que esta propiedad de las sucesiones, o cualquiera equivalente, puede usarse como postulado de continuidad de los reales. El adoptar el teorema de Weierstrass como postulado de continuidad de los reales nos obligó a elaborar demostraciones basadas en esta formulación particular de continuidad.

En los **capítulos 2** y **3** se presenta al concepto de función y los diferentes tipos de funciones que se trabajan en cálculo y que se denominan *funciones elementales*. Se trata de un nombre propio que se reserva para aquellas funciones que se construyen con las operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación y división) y la composición de funciones, aplicadas en cualquier número a las funciones algebraicas (incluyendo las polinomiales y racionales), exponenciales, logaritmos, trigonométricas y sus inversas que son las funciones arco. Las funciones elementales son casi todas las que se estudian en cálculo, y su clara identificación permite, por ejemplo, precisar el hecho de que es imposible expresar ciertas integrales en términos de éstas, lo que algunas

veces se expresa con frases como “integrales que no pueden calcularse”. Los capítulos 1, 2 y 3 se recomiendan para todos los estudiantes: principiantes, intermedios y avanzados.

El **capítulo 4** está dedicado a las sucesiones y a las series. Es rico en resultados y criterios de convergencia, tanto para sucesiones como para series. Los estudiantes que cursan cálculo por primera vez pueden prescindir de su lectura. A su vez, los estudiantes de ingeniería pueden leerlo parcialmente.

El **capítulo 5** es de especial importancia, ahí se desarrolla la teoría sobre límites de funciones, para lo cual se aprovecha la teoría sobre límites de sucesiones presentada en el capítulo 4. La definición precisa y rigurosa de la función exponencial a^x y en particular e^x para todos los reales, se establece en este capítulo, cuando ya se han desarrollado ciertas herramientas matemáticas, como el concepto de límite de sucesiones y sus propiedades. Hacia el final de este capítulo, se enuncian y prueban los tres teoremas notables para funciones que están definidas y son continuas en intervalos cerrados y acotados:

1) el teorema que establece que toda función continua en un intervalo de este tipo es uniformemente continua,
2) el teorema de Weierstrass, el cual afirma que toda función continua alcanza un valor máximo y uno mínimo, y
3) el teorema del valor intermedio.

Los tres teoremas son fundamentales en el cálculo diferencial e integral. Esta sección, que es la última del capítulo 5, se recomienda para los estudiantes intermedios o avanzados que se esán formando en escuelas de matemáticas. Para el caso de los cursos de cálculo de las carreras de ingeniería será suficiente que los estudiantes entiendan los enunciados de los tres teoremas notables y que aprendan a aplicarlos, para lo cual se recomienda que estudien los ejemplos y resuelvan los problemas correspondientes que se presentan al final del capítulo. Por su parte, los estudiantes que se inician en cálculo pueden omitir esta sección.

En el **capítulo 6** establecemos el concepto de *derivada*, uno de los dos más importantes del cálculo. La derivada se define como el límite de razones de cambio, con el que se crea el concepto de *razón de cambio instantánea*. La derivada como pendiente de una recta tangente es una interpretación y no es el concepto mismo. La razón de cambio instantánea puede interpretarse como la pendiente de una recta tangente, pero también pueden asignársele otros significados físicos o de diferente naturaleza, como lo hacemos en los ejemplos. El capítulo 6 es obligatorio para todos los lectores, sean principiantes, intermedios o avanzados. Sin embargo, se recomienda que los principiantes e intermedios omitan el estudio de las pruebas de los teoremas: regla de la cadena y derivada de la función inversa. Por su parte, para los estudiantes de ingeniería estas pruebas son optativas. Además, si los detalles técnicos de la prueba de la fórmula para la derivada del cociente de dos funciones causan alguna dificultad, ésta también puede ser omitida por quienes estudien una carrera distinta a la de matemáticas, en ese caso será suficiente que se comprendan la ideas esenciales de la misma.

El **capítulo 7** está dedicado a los teoremas más importantes del cálculo diferencial. Estos son los teoremas del valor medio: el de Rolle, el de Lagrange y el de Cauchy. También se incluyen algunas de sus consecuencias como son los teoremas de Taylor y la conocida regla de l´Hospital para calcular límites de funciones que conducen a expresiones indeterminadas de la forma $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. Éste es un capítulo sumamente importante, pues de los teoremas del valor medio se desprenden una variedad de resultados del cálculo que son reveladores del comportamiento de las funciones o que tienen útiles aplicaciones, por ejemplo, los criterios para máximos y mínimos. Las demostraciones de los teoremas del valor medio son simples y accesibles para todos los

estudiantes. Los estudiantes de ingeniería pueden omitir las demostraciones de los otros teoremas del capítulo, pero se recomienda que estudien las de los teoremas del valor medio. En todo caso, es importante comprenderlos y aplicarlos, pues constituyen un enorme potencial para el estudio de las funciones.

En el **capítulo 8** se abordan diversas aplicaciones de la derivada. Este capítulo se recomienda a todos los estudiantes, principiantes o avanzados, pues ahí se desarrollan diversos ejemplos de sistemas que se modelan con la derivada, los cuales muestran las diferentes interpretaciones que puede tener la misma. La derivada es el recurso por excelencia para modelar fenómenos donde hay variables que cambian unas respecto de otras; es un concepto poderoso para las aplicaciones.

En el **capítulo 9** se estudia el segundo concepto más importante del cálculo: la integral definida, a la cual llamamos con el nombre simple de integral. La interpretación como área de una región es sólo una de las interpretaciones útiles que tiene la integral y que utilizamos para introducirla. La construcción o definición de la integral la hacemos con todo rigor a través de las sumas de Riemann. Una de las demostraciones que presentamos es la de la existencia de la integral para funciones continuas, la cual suele omitirse en libros similares. Ponemos a disposición de los profesores esta demostración, la cual se basa en la continuidad uniforme de las funciones continuas en intervalos cerrados y acotados. Sin embargo, puede omitirse en los cursos de cálculo de ingeniería o incluso en los de algunas carreras de matemáticas, que por su nivel de dificultad corresponde a cursos de semestres posteriores.

En el **capítulo 10** se presenta el teorema más importante del cálculo diferencial e integral: el *teorema fundamental del cálculo*. Éste es el recurso por excelencia para calcular integrales, además de que también pone de manifiesto el papel relevante que juegan las primitivas o las antiderivadas de funciones en cálculo. Se trata de un concepto notable, pero no el de mayor importancia en cálculo. En torno a éste se hace una amplia discusión, en particular sobre la relación que guardan todas las primitivas de una función en un intervalo dado, lo que conduce a la llamada constante de integración. Debido a su importancia, dedicamos todo el **capítulo 11** a desarrollar técnicas para encontrar primitivas, las cuales reciben el nombre de métodos de integración. Los cursos elementales de cálculo integral suelen iniciar con las técnicas para calcular primitivas, que también se llaman integrales indefinidas, de hecho dedican una buena parte del tiempo a esos métodos, sin que quizá quede claro el lugar que ocupan las primitivas en el cálculo integral. Los métodos de integración simplemente permiten hallar primitivas de funciones, las cuales sirven para aplicar el teorema fundamental del cálculo.

Finalmente, el **capítulo 12** aborda las aplicaciones del cálculo integral. Existe una amplia variedad de situaciones en donde se aplica la integral; entre éstas destacan el cálculo de áreas de regiones en el plano, que por lo común utilizamos para motivar su definición, aunque también se aplica a la obtención de volúmenes y áreas de sólidos de revolución, que se generan al rotar una curva alrededor de un eje. Otra de sus aplicaciones es la determinación de longitudes de curvas. Algunas que también son importantes se refieren al cálculo de trabajo realizado por una fuerza, determinación de centroides, tanto de cuerpos sólidos como de curvas. Este capítulo y el 8, se recomiendan a todos los estudiantes, un curso de cálculo sin estas aplicaciones sería incompleto.

Además de mostrar la utilidad práctica que tiene el cálculo diferencial e integral a través de los diversos ejemplos presentados a lo largo del libro y de los desarrollados en los capítulos 8 y 12, otro de los objetivos del libro es contribuir a que el estudiante adquiera una formación sólida en matemáticas que apunte hacia un pensamiento analítico, característico e indispensable en todo científico o ingeniero. Este objetivo en nada se contrapone con el objetivo de que el estudiante adquiera ciertas destrezas algorítmicas, por ejemplo en la aplicación de las reglas de derivación y métodos de integración. También es conveniente que el estudiante se involucre en el uso de las computadoras, a las cuales hacemos referencia en diversas ocasiones. Es una fortuna que

vivamos en una época en la que es relativamente fácil disponer de este poderoso recurso. Hay una variedad de programas para computadora capaces de realizar rapidísimos cálculos numéricos, extraordinarios cálculos simbólicos y construir hermosas gráficas. Debido a todas estas cualidades, las computadoras incrementan nuestro potencial de descubrimiento y aprendizaje, además de que nos permiten encontrar respuestas a preguntas que en ocasiones nos planteamos sobre situaciones que, aun con los recursos analíticos de las matemáticas, son difíciles de hallar. El libro ofrece muchas oportunidades para usar esta tecnología electrónica, de hecho la solución de casi cualquier problema de este libro puede obtenerse con la ayuda de la computadora, sin embargo, la tecnología computacional debe utilizarse como último recurso o para verificar los resultados producidos por nuestros conocimientos, y no debe usarse para hallar una *pronta respuesta*, pues siempre será mejor para desarrollar nuestro intelecto anteponer la reflexión. Muchas veces lo interesante no es hallar la respuesta sino el procedimiento para hallarla.

AGRADECIMIENTOS

Con unas sentidas palabras deseo expresar mi gratitud a quienes participaron directa e indirectamente en el nacimiento de esta obra. En primer lugar, deseo que quede constancia de mi especial agradecimiento a la maestra en ciencias Rosa María García Méndez, por sus valiosos comentarios que desde siempre me hizo y que con seguridad incidieron en la calidad que pudiese tener esta obra, además de que siempre mostró su característica paciencia cuando solía exponerle algunas de las ideas que dieron origen a este libro y que sólo existían en mi mente. De alguna manera, el capítulo 1 (sobre números reales) es el resultado de las reflexiones que hicimos conjuntamente. También agradezco a los maestros en ciencias Juan Carlos Ponce, José Luis López López y Miguel Díaz Chávez por su valioso apoyo en la elaboración de los problemas. Juan Carlos y José Luis también elaboraron varias de las figuras. Agradezco a Carla Alejandra Hernández García y Josué David Zamarripa Lugo, futuros ingenieros en electrónica y estudiantes de la ESIME, así como a Alejandro González Sánchez, que en el momento de escribir este prólogo estudia en la ESFM, ambas escuelas del Instituto Politécnico Nacional, quienes me apoyaron en la revisión de las soluciones de los problemas. Termino mis agradecimientos mencionando la valiosa ayuda que en todo momento me brindó Norma Cruz Meza, asistente siempre dispuesta para que estuviese a tiempo la escritura del libro.

Finalmente, acepto que todos los errores o deficiencias que pudiese contener este libro son de mi estricta responsabilidad y manifiesto que no tendré mayor satisfacción que la que me otorgaría el que a algún lector le resulte interesante este libro. Espero que los lectores lo disfruten tanto como disfruté al escribirlo. Todas las sugerencias y las críticas serán bienvenidas e invito a quienes deseen opinar respecto al mismo, a que escriban al correo electrónico **arivera@cinvestav.mx.**

Antonio Rivera Figueroa
México, D. F., Agosto de 2007

Sotero Prieto Rodríguez (1884 – 1935)

Destacado ingeniero mexicano. Nació en Guadalajara, Jalisco, hijo del ingeniero minero y profesor de matemáticas Raúl Prieto González Bango y de doña Teresa Rodríguez de Prieto. En 1901 terminó sus estudios en la Escuela Nacional Preparatoria y en 1906 concluyó la carrera de ingeniería civil en la Escuela Nacional de Ingenieros, de la cual nunca obtuvo su título.

Durante más de un cuarto de siglo se desarrolló como profesor de matemáticas en la Escuela Nacional Preparatoria y en la Escuela Nacional de Ingenieros, donde influyó en la formación de ingenieros y licenciados en ciencias exactas.

Por su destacada labor en la enseñanza de las matemáticas y física, don Sotero Prieto Rodríguez fue considerado siempre como un gran maestro, que contribuyó de manera importante en la formación de una importante generación de destacados profesionistas, de entre quienes destacan Alfonso Nápoles Gándara, Manuel Sandoval Vallarta, Vicente Guerrero y Gama, Enrique Rivero Borrel, Nabor Carrillo Flores, Javier Barros Sierra, Alberto Barajas, Roberto Vásquez, Efrén Fierro, Carlos Graeff Fernández, Jorge Quijano, Manuel López Aguado y muchos más.

Los científicos e ingenieros discípulos del maestro Sotero Prieto consolidaron la certidumbre del gran maestro de que las ciencias matemáticas y físicas son fundamentales en cualquier ingeniería.

Respecto a la influencia que Sotero Prieto ejerció en la instauración de la matemática y la física en México, Alberto Barajas comenta: "Sotero Prieto es indudablemente el maestro al que se debe el desarrollo moderno de las matemáticas y la física". También, como dijese Elí de Gortari, en 1980, Sotero Prieto fue el precursor de la intensa actividad matemática que existe hoy día en México.

CAPÍTULO 1

LOS NÚMEROS REALES

1.1 Introducción

¿Por qué iniciamos nuestro estudio de cálculo diferencial e integral con los números reales? La respuesta es que los números reales constituyen la base sobre la cual se sustenta conceptual y prácticamente el cálculo diferencial e integral. Sin los números reales no podríamos hablar de los principales objetos y conceptos matemáticos en esta materia. Nosotros no estudiaremos los números reales con la profundidad que se requiere para hacer un tratamiento riguroso del cálculo, sin embargo sí revisaremos aquellas ideas y propiedades más importantes que nos permitirán comprender, manejar y probar sus principales resultados.

Desde que cursamos nuestros estudios de bachillerato estamos familiarizados con los números reales, aunque podríamos decir que nuestro primer contacto con ellos se remonta a la primaria, cuando aprendimos, primero a contar con los números naturales y después a aplicar los algoritmos de la adición, la multiplicación y la división con enteros o números decimales. También fue en la primaria donde conocimos un famoso número real cuando aprendimos la fórmula $C = 2\pi r$, para calcular la circunferencia de un círculo; donde r es el radio del círculo y π una constante, un número real cuyo valor siempre recordamos como 3.1416. Dado que $2r$ es el diámetro del círculo, es posible describir la fórmula para la circunferencia $C = 2\pi r$ como: la circunferencia es igual al producto que resulta de multiplicar π por el diámetro.

Pero, ¿qué es π? Con seguridad leímos su definición clásica en nuestros libros de texto de la primaria, la cual dice que π es la razón que hay entre la circunferencia de un círculo y su diámetro, es decir $\pi = \frac{C}{2r}$. La fórmula del perímetro de un círculo no es otra cosa que la misma definición de π, pareciera entonces que el único círculo interesante en la definición de π y la fórmula para la circunferencia fuera el círculo vicioso: la circunferencia es π veces el diámetro y, por definición, π es igual a la razón de la circunferencia al diámetro. Independientemente de esta extraña situación de prioridades, tenemos una definición de π de naturaleza geométrica, pero no una aritmética. Es en el contexto del cálculo, donde podemos hacer una definición aritmética de π, o debiéramos decir una definición analítica, no podemos hacer una definición de π con recursos puramente aritméticos.

Como el diámetro "cabe" cerca de 3.1416 veces en la circunferencia, π es aproximadamente 3.1416; pero, éste no es su valor exacto. Tratando de mejorar la aproximación de π, algunas veces acudimos a 3.14159 y quizá lleguemos a escribir que $\pi = 3.14159\ldots$ para indicar que todavía pueden escribirse más decimales si deseamos tener mejores aproximaciones.

1.2 Sumatorias infinitas

¿Qué significan los puntos suspensivos en la expresión decimal $\pi = 3.14159\ldots$ y en otras expresiones numéricas? La interpretación que hemos dado a estos puntos, corresponde a lo que podemos leer en el diccionario de la Real Academia Española: "signo ortográfico (...) con que se denota quedar incompleto el sentido de una oración...". Para el caso particular $\pi = 3.14159\ldots$, por ejemplo podemos plantear preguntas como: ¿cuántos decimales faltan por escribir?, ¿cuáles son esos decimales? En una sección posterior de este capítulo, dedicada a π, estudiaremos un poco acerca de su interesante historia y cómo la humanidad siempre tuvo presente dichas preguntas.

Es probable que durante nuestros estudios de secundaria o bachillerato nos enteramos de que los decimales faltantes en la expresión para el valor de π son una infinidad. Quizá π fue el primer número que conocimos con una cantidad infinita de decimales y también es probable que nuestra segunda experiencia con este tipo de expresiones se dio cuando dividimos $3\overline{)1}$:

$$\begin{array}{r l}
 & \ 0.3333 \\
3 & \overline{)1.0} \\
 & \quad 10 \\
 & \quad\ \ 10 \\
 & \quad\quad 10 \\
 & \quad\quad\ \ 1
\end{array}$$

El interesante fenómeno que observamos en este proceso de división, el cual consiste en la repetición interminable del residuo 1, nos permite continuar agregando tantos decimales como queramos en el cociente; esto lo expresamos acudiendo a los puntos suspensivos

$$\frac{1}{3} = 0.333...$$

En este caso, los puntos suspensivos tienen un significado más rico que los puntos suspensivos que utilizamos para π. Ahora no sólo indican que hay más dígitos que estamos omitiendo, sino que se trata de una infinidad de decimales iguales a 3.

Tiempo después aprendimos que las expansiones decimales de $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ se escriben (con puntos suspensivos)

$$\sqrt{2} = 1.4142...$$
$$\sqrt{3} = 1.732...$$

En estos dos casos, como para π, los puntos suspensivos ciertamente nos mantienen en el suspenso, son un misterio, no sabemos con certeza lo que representan, excepto por el hecho obvio de que sustituyen a los decimales faltantes.

Lo que representan los tres puntos suspensivos sólo puede explicarse en un curso de cálculo y no en uno de aritmética elemental, pues para este fin se requiere el concepto de límite o algún otro concepto con el mismo grado de complejidad. Por ejemplo, con los puntos suspensivos podemos escribir

$$1 = 0.999...$$

Veamos qué significa esto. Es bien conocido por nosotros que la expresión 0.25, significa

$$0.25 = 0 + \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2}$$

De forma similar, el significado de la expresión decimal 1.4142 es

$$1.4142 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4}$$

Pero, ¿qué significa la expresión 1.4142...? Si con ingenuidad sólo trasladamos los tres puntos suspensivos a la sumatoria

$$1.4142\cdots = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \cdots,$$

podemos entender que simplemente ocupan el lugar de los sumandos faltantes. Un caso simple de lo que representan estos tres puntos, es cuando la cantidad de decimales faltantes es finita, pero en Cálculo, la cantidad de sumandos omitidos puede ser infinita; así, los tres puntos suspensivos pueden representar una infinidad de sumandos. Una sumatoria con una infinidad de sumandos se define a través del concepto de límite. Observe con cuidado las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} &= 0.25 = \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2}\\
\sqrt{2} &= 1.4142\cdots = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \cdots\\
1.4142 &= 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4}\\
\sqrt{3} &= 1.732\cdots = 1 + \frac{7}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \cdots\\
1.732 &= 1 + \frac{7}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{2}{10^3}\\
\pi &= 3.14159\ldots = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \cdots\\
3.14159 &= 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5}
\end{aligned}$$

Nótese que las relaciones

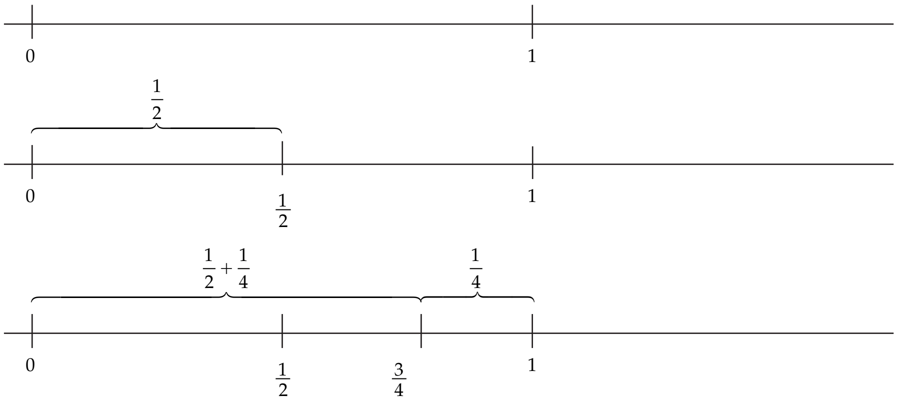
$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1.4142\\
\sqrt{3} &= 1.732\\
\pi &= 3.1416
\end{aligned}$$

son incorrectas (¿por qué?).

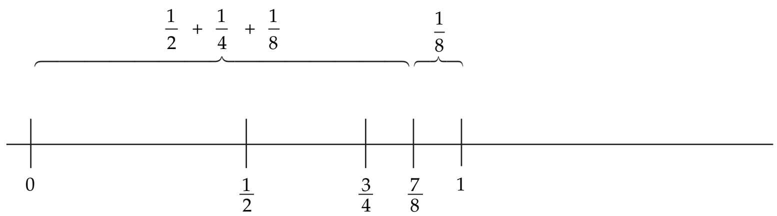
En aritmética elemental, la operación adición está permitida sólo para una cantidad finita de sumandos; más adelante extenderemos esta operación a una cantidad infinita. No es fácil concebir que tal operación sea posible, quizá pensemos que la infinitud de sumandos necesariamente nos conduce a resultados infinitos, sin embargo es posible sumar una cantidad infinita de números teniendo como resultado un número finito. A reserva de que más adelante estudiemos este concepto, veamos algunos ejemplos que nos ayudarán a entender que tales sumatorias tienen sentido.

Vamos a construir una sucesión de sumatorias, para esto tomemos un segmento de longitud, una unidad. Dividámoslo en dos partes iguales y tomemos como primer sumando una de ellas. Ahora, la mitad restante del segmento la dividimos en dos partes iguales. Cada una de estas partes tendrá una longitud de $\frac{1}{4}$. Tomemos una de estas cuartas partes como segundo sumando. Entonces, tenemos la suma

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$



El segmento restante, de longitud $\frac{1}{4}$, lo dividimos ahora en dos partes, cada una de longitud $\frac{1}{8}$. Una de estas dos partes es de longitud $\frac{1}{8}$ y constituye otro sumando



Si continuamos con este proceso, obtendremos de forma consecutiva las siguientes sumatorias

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$

etcétera. Podemos ver en nuestras figuras que el resultado de cada una de las sumatorias es igual a lo que resulta de sustraerle al segmento unitario el segmento que nos ha quedado después de construir la sumatoria. Así, la suma puede calcularse fácilmente sin necesidad de realizar las operaciones con las fracciones. Por ejemplo, tenemos

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1-\frac{1}{8}$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=1-\frac{1}{16}$$

Entonces podemos escribir

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+\frac{1}{1024}=1-\frac{1}{1024}=\frac{1023}{1024}$$

El caso general se escribe

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}$$

En esta sumatoria general, n representa un número natural arbitrario. Entonces tenemos una sumatoria con n sumandos. De la expresión para ésta, concluimos que la suma siempre será menor que 1 y que a medida que incrementamos el número de sumandos se aproximará a 1 tanto como queramos. En símbolos escribimos

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\approx 1,\quad \text{para } n \text{ grande}$$

Dado que para valores grandes de n, la suma "es casi 1", es posible decir que la sumatoria con la infinidad de sumandos es igual a 1, exactamente 1 y escribimos

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1$$

Los tres puntos suspensivos representan la infinidad de sumandos restantes.

La expresión anterior es una definición, una abstracción, una extensión de la operación adición de la aritmética elemental. Ahora, nos permitiremos adicionar una cantidad infinita de sumandos.

En este ejemplo particular fue posible asignar el resultado 1 a la sumatoria infinita, pues de la fórmula general

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

concluimos que "lo que le falta a la suma para ser 1" es= $\frac{1}{2^n}$, lo cual es muy pequeño si n es grande.

Si a la fórmula anterior adicionamos una unidad a ambos miembros, obtenemos una sumatoria cuyo primer sumando es 1.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=2-\frac{1}{2^n}$$

Esta sumatoria es un caso particular de lo que se llama *suma geométrica*. Aunque nosotros obtuvimos esta fórmula acudiendo a la interpretación gráfica, podemos deducirla sin este recurso. Por ejemplo, también tenemos las siguientes relaciones

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$$
$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\cdots+\frac{1}{5^n}=\frac{5}{4}\left(1-\frac{1}{5^{n+1}}\right)$$
$$1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\cdots+\frac{1}{7^n}=\frac{7}{6}\left(1-\frac{1}{7^{n+1}}\right)$$

Para deducir estas relaciones deberemos usar la fórmula de la *suma geométrica*. Si r es cualquier número real diferente de 1 y n es cualquier número natural, entonces

$$1+r+r^2+r^3+\cdots+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

Si hacemos las sustituciones respectivas $r = \frac{1}{3}$, $r = \frac{1}{5}$ y $r = \frac{1}{7}$, obtenemos las relaciones anteriores, de las cuales podemos escribir las sumatorias infinitas

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots = \frac{3}{2}$$
$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \cdots = \frac{5}{4}$$
$$1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{7}{6}$$

En conclusión, le hemos dado sentido a estas sumatorias particulares con una cantidad infinita de sumandos.

En las siguientes secciones de este capítulo estudiaremos con cierto detalle las representaciones decimales y su relación con el concepto de número real.

1.3 Números racionales y expansiones decimales

Un número racional es cualquiera de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son enteros con $q \neq 0$, por ejemplo $\frac{1}{3}$, $\frac{-26}{13}$ y $\frac{11}{-7}$. Es posible representar los números racionales en la forma $\pm\frac{p}{q}$, donde p es entero no negativo (es decir, entero positivo o cero) y q es entero positivo. Cuando p es divisible por q, entonces $\frac{p}{q}$ se reduce a un entero positivo, así que todos los enteros (positivos, negativos y el cero) también son llamados números racionales.

La *expansión decimal* de un número racional consiste de entero a, llamado *parte entera*, seguido de un punto, llamado *punto decimal*, el cual a su vez es seguido de una lista o sucesión de dígitos, llamados *cifras decimales* o simplemente *decimales*:

$$x = a.a_1a_2a_3\ldots$$

La **expansión decimal** de un número racional, no es otra cosa que una representación del número, cuyo significado es una sumatoria de múltiplos de potencias de $\frac{1}{10}$. Por ejemplo, la representación

$$\frac{5}{4} = 1.25$$

es otra forma de escribir

$$\frac{5}{4} = 1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2}$$

Otro ejemplo es

$$\frac{5093}{2500} = 2.0372 = 2 + \frac{3}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{2}{10^4}$$

En general, una expansión decimal $x = a.a_1a_2a_3\ldots a_k$, donde a es un entero y $a_1, \ldots, a_k$ son dígitos, significa

$$x = a.a_1a_2a_3\ldots a_k = a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_k}{10^k}$$

Cada uno de los decimales indica el múltiplo de la potencia de $\frac{1}{10}$, la cual depende de la posición que ocupe el dígito. El dígito a_i en la posición i, es el factor de la potencia $\frac{1}{10^i}$.

Un fenómeno interesante es el que ocurre con el racional $\frac{1}{3}$, el cual no puede escribirse en la forma $x = a.a_1a_2a_3 \ldots a_k$. En este caso, recurrimos a una representación decimal con puntos suspensivos

$$\frac{1}{3} = 0.333\ldots$$

Ésta es una expresión que en el estudio de la matemática previa a la universidad sólo significa que el proceso de la división no termina, es decir, puede continuarse todo lo que se desee. En ese nivel, éste es el único significado de los puntos suspensivos, pero también se dice que la expansión decimal es infinita. Si queremos darle algún sentido preciso a este tipo de expresiones tenemos que recurrir a la noción de sumatoria con un número infinito de sumandos. Las expansiones finitas se obtienen cuando, al aplicar el algoritmo de la división, obtenemos en algún momento residuo cero, pero cuando nunca lo alcanzamos no es posible representar el racional en la forma $x = a.a_1a_2a_3 \ldots a_k$ (sumatoria finita). Otro ejemplo de este fenómeno es

$$
\begin{array}{rl}
 & 0.7142857 \\
7 & \!\!\overline{)5.0} \\
 & 10 \\
 & 30 \\
 & 20 \\
 & 60 \\
 & 40 \\
 & 50 \\
 & 1
\end{array}
$$

En este ejemplo, el primer residuo que obtuvimos fue 1, mismo que volvemos a obtener durante el proceso de la división. Al obtener el residuo 1 por segunda ocasión, podemos adivinar que la secuencia se repite, y entonces sabemos lo que continuará si proseguimos con el proceso. Esto significa que no es posible escribir el racional $\frac{5}{7}$ como una expansión finita. En este caso, como en el caso de $\frac{1}{3}$, escribimos

$$\frac{5}{7} = 0.714285714285...$$

Con los puntos suspensivos queremos decir, aunque no de manera explícita, que la cadena de dígitos 714285 se repite infinitas veces. Como los puntos suspensivos sólo representan la ausencia de decimales y no proporcionan más información, resulta mejor opción la siguiente escritura

$$\frac{5}{7} = 0.714285\overline{714285}$$

Con la línea o testada arriba de los decimales hacemos explícita la cadena de dígitos que se repite infinitas veces. Esta cadena de dígitos se llama *periodo* de la expansión decimal, aunque también es posible decir, al mismo tiempo, que la expansión decimal es *periódica*.

En términos estrictos, la expresión anterior significa una sumatoria infinita. En nuestros ejemplos tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3} &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots \\
\frac{5}{7} &= \frac{7}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{8}{10^5} + \frac{5}{10^6} + \cdots
\end{aligned}
$$

Para definir el resultado de una sumatoria tal se requiere el concepto de límite. Este concepto es lo que hace la diferencia entre la aritmética elemental y el cálculo.

Un hecho interesante es que la expansión decimal de cualquier número racional positivo $\frac{p}{q}$ es periódica, es decir, siempre tendrá un periodo. Para convencernos de ello, observemos que si tenemos una fracción $\frac{p}{q}$ y realizamos la división $q\overline{)p}$ con el algoritmo ya conocido desde la primaria, tenemos dos opciones:

- o bien, finalmente obtenemos residuo cero.
- o en algún momento del proceso obtendremos la repetición de un residuo diferente de cero.

La repetición del residuo es inevitable, pues tenemos sólo un número finito de posibilidades para el mismo. Por ejemplo, para la división $7\overline{)5}$, los únicos posibles residuos son 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6, así que en el proceso de la división eventualmente se va a repetir alguno de estos residuos, que fue lo que ocurrió cuando obtuvimos la expansión decimal de $\frac{7}{5}$. Otro ejemplo es la división $2500\overline{)5093}$; en este caso, los posibles residuos son $0, 1, 2, \ldots, 2499$. Por fortuna, la repetición de uno de los residuos apareció tempranamente, por lo que pronto obtuvimos la expansión decimal finita $\dfrac{5093}{2500} = 2.0372$.

En general, si durante el proceso de la división $q\overline{)p}$ obtenemos residuo cero, concluiremos el proceso y obtendremos una expansión decimal finita. Pero, si nunca se obtiene residuo cero, entonces durante el proceso de la división inevitablemente se repetirá uno de los residuos, que será un número finito $0, 1, 2, \ldots, q-1$, dando lugar a un periodo. Esto significa que

Toda expansión decimal de un número racional es periódica.

Algo menos obvio y más interesante es el hecho de que si escribimos cualquier expresión decimal con el periodo que deseemos, esa expresión será la expansión decimal de algún racional positivo $\frac{p}{q}$. Por ejemplo, trate de imaginar a cuáles racionales corresponden las expansiones

$$\begin{aligned} 0.666\ldots &= 0.\overline{6} \\ 1.111\ldots &= 1.\overline{1} \end{aligned}$$

Para explicar el método que nos permitirá obtener el racional a partir de su expansión decimal periódica, veamos primero el caso general de las expansiones decimales finitas. Por ejemplo, ya hemos visto que expresiones como 7.14935 y 60384.30029 significan

$$\begin{aligned} 7.14935 &= 7 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{5}{10^5} \\ 60384.30029 &= 60384 + \frac{3}{10} + \frac{2}{10^4} + \frac{9}{10^5} \end{aligned}$$

En realidad podemos escribir en potencias de 10 y de $\frac{1}{10}$:

$$\begin{aligned} 7.14935 &= 7 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{5}{10^5} \\ 60384.30029 &= 6 \times 10^4 + 3 \times 10^2 + 8 \times 10 + 4 \times 10^0 + \frac{3}{10} + \frac{2}{10^4} + \frac{9}{10^5} \end{aligned}$$

De este significado general de una expansión decimal finita, es posible deducir la muy usada regla de multiplicación por 10, que consiste en recorrer el punto una posición a la derecha. Por ejemplo, para multiplicar por 10 el número 60384.30029, simplemente recorremos el punto decimal una posición a la derecha:

$$\begin{aligned}
&10 \times 60384.30029 = 10 \times \left(6 \times 10^4 + 3 \times 10^2 + 8 \times 10 + 4 \times 10^0 + \frac{3}{10} + \frac{2}{10^4} + \frac{9}{10^5}\right) \\
&= 6 \times 10^5 + 3 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 4 \times 10 + 3 \times 10^0 + \frac{2}{10^3} + \frac{9}{10^4} \\
&= 603843.0029
\end{aligned}$$

Estas ideas, aun cuando sea a nivel intuitivo, podemos extenderlas al caso de sumatorias con un número infinito de sumandos. La regla de la multiplicación por 10, que consiste en recorrer el punto decimal una posición a la derecha y que podemos justificar por completo para expansiones decimales finitas, puede extrapolarse para expansiones decimales infinitas, por ejemplo, si

$$x = 0.333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \cdots$$

entonces

$$\begin{aligned}
10x &= 10 \times (0.333\ldots) \\
&= 10 \times \left(\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \cdots\right) \\
&= 3 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots \\
&= 3 + 0.333\ldots \\
&= 3.333\ldots.
\end{aligned}$$

En resumen, si $x = 0.333\ldots$, entonces $10x = 3.333\ldots$ La justificación de este hecho es una propiedad de las sumatorias infinitas también llamadas series, las cuales estudiaremos en el capítulo 4.

Ahora veamos, a través de ejemplos, cómo podemos aplicar la regla de la multiplicación por 10 para encontrar el número racional, cuando conocemos su expansión decimal infinita. La primera aplicación es el interesante caso de la expansión decimal infinita con periodo 9:

$$a = 0.999\ldots$$

En este caso tenemos

$$10a = 9.999\ldots$$

Así que

$$\begin{aligned}
10a &= 9.999\ldots \\
a &= 0.999\ldots
\end{aligned}$$

Observemos que al restar la segunda expresión de la primera, la parte decimal que es común a ambos números, se cancela para darnos

$$9a = 9$$

Por tanto, finalmente obtenemos

$$a = \frac{9}{9} = 1$$

Es decir

$$1 = 0.999\ldots$$

Veamos otro ejemplo, sea

$$b = 0.3525252$$

En este caso, el periodo es 52, pero inicia en el segundo decimal de la expansión. Para descubrir la fracción $\frac{p}{q}$ a la cual corresponde la expansión decimal dada, aplicaremos fundamentalmente la misma idea que en el ejemplo anterior. Construiremos dos expansiones decimales con la misma parte decimal, si bien infinita será común a ambos números. Al restar uno de éstos al otro, obtendremos un entero, pues las partes decimales se eliminarán. Con esto, finalmente será posible expresar la expansión dada como cociente de dos enteros positivos:

$$\begin{aligned} b &= 0.3525252 \\ 1\,000b &= 352.525252\ldots \\ 10b &= 3.525252\ldots \\ 990b &= 352 - 3 \\ 990b &= 349 \end{aligned}$$

De donde obtenemos

$$b = \frac{349}{990}$$

Con estos ejemplos es fácil adivinar la estrategia que podemos seguir para hallar el racional cuando se conoce su expansión decimal infinita. Primero, tenemos que saber que se trata de una expansión decimal periódica, esta condición es muy importante, además tenemos que conocer el periodo. Una vez que se conocemos esto, construimos dos múltiplos distintos del número dado, de manera que ambos múltiplos tengan una expansión decimal con el mismo periodo, el cual deberá iniciar a partir del punto decimal. De esta manera, al hallar la diferencia de ambos múltiplos se cancela la parte decimal y se obtiene un número entero. Esto permitirá obtener el racional buscado.

De lo anterior obtenemos la importantísima caracterización de los números racionales:

a) *Todo número racional* $\dfrac{p}{q}$ *tiene una expansión decimal periódica, y*

b) *Toda expansión decimal periódica corresponde a un número racional.*

Aquí es importante hacer una reflexión de carácter lógico. La condición *a*) no afirma que los números racionales sean los únicos que tienen expansión decimal periódica, su afirmación es más débil, debido a que deja la posibilidad de que haya números no racionales con expansión decimal periódica, pero ésta queda eliminada por la propiedad *b*). Precisamente la propiedad *c*) dice que no hay otro tipo de números que tengan expansión decimal periódica. Dicho de

otra manera, si una expansión decimal es periódica, entonces la expansión corresponde a un número racional, no hay otra posibilidad. Ambas condiciones *a*) y *b*) podemos enunciarlas a la vez diciendo que los números racionales están caracterizados por el hecho de que su expansión decimal es periódica.

Entonces, una manera de identificar a los números racionales es mediante su expansión. Por tanto, si estamos ante una expansión decimal que no es periódica, se trata de un número que no es racional. Una pregunta que surge de manera natural es si los siguientes números tienen expansiones decimales periódicas

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1.4142156\ldots \\ \sqrt{3} &= 1.7320508\ldots \\ \pi &= 3.14159265\ldots \end{aligned}$$

En las siguientes secciones despejaremos esta duda.

1.4 Números irracionales y expansiones decimales no periódicas

Los números racionales son por definición cociente de enteros $\frac{p}{q}$, con $q \neq 0$; se caracterizan porque su expansión decimal es periódica. Por tanto, un número cuya expansión decimal no sea periódica no es racional, estos números reciben el nombre *irracionales*. Entonces, los irracionales son los números cuya expansión decimal es no periódica o bien se puede decir que son los que no se pueden escribir como cociente de enteros.

Tenemos entonces dos caracterizaciones de los irracionales:

a) *Un número es irracional si no es posible representarlo como cociente de dos enteros.*
b) *Un número es irracional si su expansión decimal es no periódica.*

Los números reales son conjuntamente los racionales y los irracionales. Así que hay dos tipos de números reales. Dado un número real, éste puede ser racional o irracional. Todo número real tiene una expansión decimal, finita o infinita. Los números racionales son aquellos cuya expansión decimal es periódica, esto incluye a los que tienen expansión decimal finita que constituyen casos particulares de las expansiones periódicas. Los números irracionales son los que tienen expansión decimal no periódica.

En principio, uno puede determinar si un número es racional o irracional observando su expansión decimal. Si se observa un periodo, el número será racional. Sin embargo, en la práctica puede ocurrir que sea difícil observar el periodo de un número racional, la longitud puede ser tan grande que no sea posible identificarlo. Por ejemplo, suponga que el periodo consiste de un millón de dígitos, a simple vista sería imposible determinar si hay o no periodo, incluso puede ser difícil para una computadora. Para darnos una idea de la dimensión de este problema, supongamos que las siguientes expansiones decimales son periódicas, trate usted de determinar un posible periodo

$$\begin{aligned} a &= 1.54398221543982215439822154398221543982215439822154398221543982215439822\ldots \\ b &= 1.2732491852479164720964253420864411852479164720964253420864411852 4\ldots \end{aligned}$$

Para el primer número no es difícil reconocer un posible periodo, que consiste de los dígitos 54398221; sin embargo, para el segundo número no es fácil identificar lo que puede ser un periodo 1852479164720964253420864 41.

Por otra parte, es perfectamente posible que, a partir de la expansión decimal de un número, podamos concluir que se trata de un número irracional, es decir, es posible saber que la expansión decimal es no periódica. Por ejemplo, consideremos el número cuya expansión decimal es

$$1.01001100011100001111\ldots$$

Los tres puntos representan los decimales que a continuación describimos: después de los cuatro unos, sigue un bloque de cinco ceros y cinco unos, seguido por un bloque de seis ceros y seis unos. En general, la expansión está formada por bloques de n ceros consecutivos y n unos consecutivos. Después de un bloque de n ceros y n unos le sigue un bloque de $n + 1$ ceros y $n + 1$ unos.

Esta expansión decimal es no periódica, por lo que representa un número irracional, pero podemos decir que conocemos todos sus decimales, pues es posible determinar el decimal que corresponde a cualquier posición dada. Por ejemplo, aunque hemos escrito sólo unos cuantos decimales podemos determinar el decimal que aparece en la posición 100. Para eso, podemos extender la lista de los decimales o hacer algo más inteligente, como crear alguna estrategia de conteo, que nos permita determinar cuál es el dígito que aparece en esa posición. Por ejemplo, agrupemos los decimales en bloques de ceros y unos, el mismo número de ceros y de unos. El primer bloque es 01, el segundo bloque 0011, el tercero es 000111, y así sucesivamente. Por ejemplo, el bloque 20 estará formado por 20 ceros y 20 unos. El bloque n-ésimo estará formado por n ceros seguidos de n unos; en total está constituido por $2n$ dígitos. Ahora podemos obtener la cantidad de dígitos acumulados desde el bloque uno hasta el bloque n:

$$\begin{aligned}\underbrace{2}_{\text{bloque }1} + \underbrace{4}_{\text{bloque }2} + \underbrace{6}_{\text{bloque }3} + \cdots + \underbrace{2n}_{\text{bloque }n} &= 2(1 + 2 + 4 + \cdots + n)\\ &= 2\frac{n(n+1)}{2}\\ &= n(n+1)\end{aligned}$$

Por ejemplo, es fácil identificar que el número de dígitos acumulados hasta el bloque cinco es $5 \cdot 6 = 30$ y que el número de dígitos hasta el bloque 10 es $10 \cdot 11 = 110$. De aquí concluimos que el decimal en la posición 110 es un uno. De igual modo se puede concluir que el bloque 10 está formado por 10 ceros y 10 unos, así que el decimal de la posición 100 es un cero (es el último cero del bloque 10), este cero va seguido de 10 unos.

En muchos casos, ciertamente, los decimales de un número irracional son desconocidos, a excepción de algún número finito de éstos, pero es importante notar que el hecho de que la cantidad de dígitos de una expansión sea infinita, no significa que todos estos sean en su totalidad desconocidos; en otras palabras, la infinidad de éstos no se contrapone con el hecho de que pudieran ser conocidos. Así, podemos decir que en el ejemplo anterior conocemos todos los dígitos de la expansión, aun cuando no es periódica. Conocer todos los dígitos de la expansión significa que en teoría es posible determinar el dígito que ocupa cualquier posición en la expansión. Trate de determinar los dígitos que aparecen en las posiciones respectivas 1305 y 9742, de la expansión decimal antes dada.

Otro ejemplo de una expansión decimal no periódica, de la que podemos decir que son completamente conocidos todos sus decimales, es

$$d = 0.123456789101112131415161718192021\ldots$$

La expansión decimal la construimos yuxtaponiendo en orden todos los números naturales; otra vez, podemos decir que conocemos todos los decimales de esta expansión, pues es posible determinar el decimal que corresponde a cualquier posición dada. Quizá no sea tan simple como el caso anterior, pero podemos crear una estrategia de conteo que nos permita determinar el dígito que aparece en cualquier posición dada.

Si deseamos averiguar si un número es irracional podemos proceder de dos maneras, o bien mostramos que no es posible escribirlo como cociente de dos enteros o que su expansión decimal no es periódica. En general, tratar de probar cualquiera de las dos propiedades para un número dado puede ser un problema difícil.

En la siguiente sección probaremos que $\sqrt{2}$ es irracional mostrando que no es posible escribirlo como cociente de dos enteros positivos, lo cual implica que su expansión decimal es no periódica. Por otra parte, hoy se sabe que π es irracional, y aunque su prueba es mucho más complicada y no la veremos aquí, si nos enteraremos cuándo y quién la llevó a cabo. Antes de que se tuviera la certeza de que π fuera irracional, hubo muchos intentos por tratar de encontrar un periodo, intentando con ello probar que era racional. Por supuesto, los intentos fallaron, pues no existe tal periodo. Cuando revisemos un poco la interesante historia de este número comentaremos acerca de la investigación que se generó por el hecho de no saber que constituía un número irracional. También conoceremos otro famoso número irracional denotado por la letra e. Este número, conjuntamente con π, son de los más notables de la matemática. Otro número famoso es el llamado *constante gamma* de Euler, denotado precisamente por la letra griega γ (gamma). Es posible aproximarse a la constante γ calculando

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

para valores grandes de n. Por ejemplo, tenemos las siguientes aproximaciones de γ

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10} - \log 10 &\approx 0.6263831609\\
1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{100} - \log 100 &\approx 0.5822073316\\
1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{1\,000} - \log 1\,000 &\approx 0.5777155815\\
1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{1\,000\,000} - \log 1\,000\,000 &\approx 0.5772161655
\end{aligned}$$

A continuación mostramos los primeros 20 decimales de la constante gamma de Euler

$$\gamma = 0.57721566490153286060.$$

Un problema interesante acerca de este número es que actualmente no se sabe si es racional o irracional; es un problema que aún no se resuelve. Quien halle la respuesta a esta interrogante con certeza se inmortalizará en la historia de la matemática.

1.5 Los irracionales $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$

Como se anunció en la sección anterior, ahora probaremos que $\sqrt{2}$ es un número irracional. La prueba que haremos tiene varios mensajes, será muy ilustrativa. En primer lugar se trata de una

demostración de imposibilidad matemática, la imposibilidad de representar $\sqrt{2}$ como cociente de enteros. Que $\sqrt{2}$ no sea representado como cociente de enteros no es cuestión de tiempo o de incapacidad de quienes lo han intentado, debido a que desde siempre se han encontrado ante una situación donde es contundentemente imposible. Vale decir que nadie ha podido, porque nadie jamás podrá hallar tal representación, no es cuestión de tiempo, dedicación o incapacidad. Este tipo de situaciones son comunes en matemáticas y podemos referirnos a ellas como casos de imposibilidad matemática. Para las pruebas de imposibilidad es muy común una técnica de prueba, en la cual se utiliza el llamado razonamiento por contradicción o la también llamada prueba por reducción al absurdo. En realidad, estos dos nombres se refieren a métodos diferentes, y aunque la diferencia es un tanto sutil, por el momento podemos pensar que tratan de lo mismo.

Haciendo algunas ligeras modificaciones a la prueba que vamos a presentar para $\sqrt{2}$, podemos demostrar que $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ son números irracionales. De hecho, el tipo de argumento se puede utilizar para probar que todo número de la forma $\sqrt{p}$ es irracional cuando p no es cuadrado perfecto. Recordemos que un entero p, es *cuadrado perfecto* si es el cuadrado de otro entero. Por ejemplo, 16 es cuadrado perfecto pues es el cuadrado de 4, también son cuadrados perfectos los números 169 y 13689, ¿por qué? Un número no es cuadrado perfecto si no es el cuadrado de algún entero. Por ejemplo, 2 no es cuadrado perfecto, pues no existe un entero cuyo cuadrado sea 2, tampoco lo son 3, 5 y 6.

Los griegos ya sabían que $\sqrt{2}$ era un número irracional; no lo expresaban con este lenguaje, pero en esencia conocían esta propiedad de $\sqrt{2}$. Aunque usando su lenguaje, los griegos ya sabían que la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles y cualquiera de sus catetos eran inconmensurables. Que sean dos segmentos *inconmensurables* quiere decir que no es posible medirlos con una unidad común, es decir, no es posible hallar un tercer segmento con el cual se puedan medir ambos segmentos dados, un segmento tal que los dos segmentos dados sean múltiplos enteros de él. En términos coloquiales podríamos decir que no existe un segmento que "quepa" un número entero de veces en cada uno de los dos segmentos dados. La inconmensurabilidad del cateto y la hipotenusa en un triángulo isósceles rectángulo equivale, en el lenguaje moderno, a que $\sqrt{2}$ es irracional.

Prueba: $\sqrt{2}$ es irracional

Probemos que no es posible escribir $\sqrt{2}$ en la forma

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

donde $q \neq 0$.

Supongamos que fuese posible tal representación. Así, podríamos suponer que los enteros p y q no tienen divisores en común o, lo que es igual, que no tienen factores en común. Si el numerador y el denominador tuviesen divisores en común, podríamos simplificar la fracción eliminando todos estos factores, obteniendo así una como la que se está suponiendo. Esta condición va a ser muy importante en nuestra argumentación.

Entonces, al elevar al cuadrado ambos miembros de la relación $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, obtenemos

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

Por tanto

$$2q^2 = p^2$$

Esta relación nos dice que p^2 es un número par, entonces necesariamente p es un entero par, porque si fuese impar, su cuadrado sería impar. Tenemos entonces una primera conclusión, en la representación $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, el entero p tiene que ser par. Como p es par, lo podemos escribir en la forma $p = 2k$, donde k es un entero. Usando esta forma para p y sustituyéndola en $2q^2 = p^2$, obtenemos

$$2q^2 = p^2$$
$$2q^2 = 4k^2$$

Por tanto

$$q^2 = 2k^2$$

De esta relación podemos concluir, por un argumento totalmente similar al que usamos para p, que q es un entero par. Pero esto es imposible, pues contradice nuestra hipótesis de que p y q no tienen divisores en común, en particular no pueden ser ambos números pares. Hemos llegado a una contradicción inevitable de suponer posible la relación $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Por lo que podemos concluir finalmente que tal relación es imposible. Esto significa que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

La prueba anterior nos permite afirmar contundentemente que, aun usando una poderosa computadora, es inútil tratar de hallar un periodo para $\sqrt{2}$, este número es irracional y por tanto su expansión decimal es no periódica.

Ahora analicemos la demostración anterior y observemos cuáles son los hechos importantes que utilizamos. Uno de ellos es que si el cuadrado de un entero es par entonces el entero mismo es par. Esto se debe al hecho de que

- el cuadrado de todo entero impar es impar.

Además, es cierto que

- el cuadrado de todo entero par es par.

En efecto, dado un entero n hay dos posibilidades: es par o es impar. Es decir, o bien n es de la forma $n = 2m$ o es de la forma $n = 2m + 1$, donde m es un entero. Los pares son de la forma $2m$ y los impares son los enteros de la forma $2m + 1$, con m entero. Entonces, si n es par tenemos

$$n = 2m$$
$$n^2 = 4m^2 = 2(2m^2)$$

Esto implica que n^2 es par, pues se tiene la forma $n^2 = 2k$.

Por otra parte, si n es impar, tenemos

$$n = 2m + 1$$
$$n^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$$
$$n^2 = 2(2m^2 + 2m) + 1$$

Así que n^2 es impar, pues es de la forma $n^2 = 2k + 1$.

De lo anterior, podemos concluir que

- si el cuadrado de un entero es par, entonces el entero es par.

Y también

- si el cuadrado de un entero es impar, entonces el entero es impar.

En realidad lo que nos interesó de la prueba es que dado un entero n, hay dos posibilidades para n: o es de la forma $n = 2m$ o de la forma $n = 2m + 1$, donde m es un entero. El nombre que se les asigne a los números de una u otra clase (par e impar) es irrelevante. Esta reflexión es importante, porque si deseamos probar que $\sqrt{3}$ es irracional, será necesario mirar nuestros argumentos desde otro punto de vista.

Prueba: $\sqrt{3}$ es irracional

Supongamos que $\sqrt{3}$ pudiera escribirse en la forma

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q}$$

Como en el caso anterior, supongamos que p y q no tienen divisores en común. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{3} &= \frac{p}{q} \\ 3 &= \frac{p^2}{q^2} \\ 3q^2 &= p^2 \end{aligned}$$

Imitando la prueba anterior, concluimos ahora que p^2 es múltiplo de 3, pero ¿qué podemos concluir sobre p? En la prueba anterior la conclusión fue que p^2 era un par, es decir un múltiplo de 2, de lo cual concluimos, a su vez, que p era par. Nos encontramos en la parte de la demostración que hemos de adaptar al caso de $\sqrt{3}$. Ahora, lo importante es saber que para todo entero positivo p hay tres posibilidades:

- que p sea múltiplo de 3, es decir que p sea de la forma $p = 3m$,
- que p sea de la forma $p = 3m + 1$,
- que p sea de la forma $p = 3m + 2$.

Es fácil ver que si p es de la forma $p = 3m + 1$, entonces su cuadrado es de la misma forma. Por otra parte, si p es de la forma $p = 3m + 2$, su cuadrado es de la forma $p = 3m + 1$. En efecto,

$$\begin{aligned} &(3m + 1)^2 = 9m^2 + 6m + 1 = 3(3m^2 + 2m) + 1 \\ &(3m + 2)^2 = 9m^2 + 12m + 4 = 9m^2 + 12m + 3 + 1 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1 \end{aligned}$$

Por tanto, si p^2 es múltiplo de 3, entonces p no puede ser ni de la forma $p = 3m + 1$ ni de la forma $p = 3m + 2$, esto implica que p tiene que ser de la forma $p = 3k$. Sustituyendo esta expresión para p, obtenemos

$$\begin{aligned} 3q^2 &= p^2 \\ 3q^2 &= (3k)^2 \\ 3q^2 &= 9k^2 \\ q^2 &= 3k^2 \end{aligned}$$

Esto implica que q^2 es múltiplo de 3, luego entonces, q es múltiplo de 3. Así que p y q son múltiplos de 3, lo cual no puede ser, pues, por hipótesis, p y q no tienen divisores en común. Como esta contradicción se obtuvo a partir de la suposición de que $\sqrt{3}$ es igual a un cociente $\frac{p}{q}$, finalmente podemos concluir que no existen enteros positivos p y q, tales que $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$. Esto significa que $\sqrt{3}$ es irracional.

En la sección de ejercicios se pide al lector que pruebe que $\sqrt{3}$ es irracional, así pues, puede usar la prueba anterior, haciendo las adaptaciones apropiadas.

1.6 Racionalización

La racionalización de una fracción cuyo denominador es alguna raíz, es cualquier proceso mediante el cual se transforma la fracción en otra equivalente con un denominador que no tenga radicales. Por ejemplo, la fracción $\frac{1}{\sqrt{2}}$, se puede transformar como sigue

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Así que tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Entonces, decimos que hemos racionalizado la fracción $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Veamos otros ejemplos

Ejemplo 1

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ejemplo 2

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{7}}{7} = \frac{\sqrt{35}}{7}$$

Ejemplo 3

$$\frac{4}{\sqrt[3]{4}} = \frac{4\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2}} = \frac{4\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4\sqrt[3]{2}}{2} = 2\sqrt[3]{2}$$

Ejemplo 4

$$\frac{3}{\sqrt[3]{9}} = \frac{3\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{3}} = \frac{3\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{3\sqrt[3]{3}}{3} = \sqrt[3]{3}$$

Ejemplo 5

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}-1} &= \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} \\ &= \sqrt{2}-1\end{aligned}$$

Ejemplo 6

$$\begin{aligned}\frac{8}{\sqrt{5}-1} &= \frac{8(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}\\ &= \frac{8(\sqrt{5}+1)}{5-1}\\ &= \frac{8(\sqrt{5}+1)}{4}\\ &= 2(\sqrt{5}+1)\end{aligned}$$

Ejemplo 7

$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{7}-3}{2\sqrt{7}+3} &= \frac{(2\sqrt{7}-3)(2\sqrt{7}-3)}{(2\sqrt{7}+3)(2\sqrt{7}-3)}\\ &= \frac{(2\sqrt{7}-3)^2}{(2\sqrt{7})^2-3^2}\\ &= \frac{28-12\sqrt{7}+9}{28-9}\\ &= \frac{37-12\sqrt{7}}{21}\end{aligned}$$

Ejemplo 8

$$\begin{aligned}\frac{5\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}-1} &= \frac{(5\sqrt{3}+3)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}\\ &= \frac{15+5\sqrt{3}+3\sqrt{3}+3}{3-1}\\ &= \frac{18+8\sqrt{3}}{2}\\ &= 9+4\sqrt{3}\end{aligned}$$

Ejemplo 9

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{5}-1} &= \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}\\ &= \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1}\\ &= \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4}\\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{2}\end{aligned}$$

Ejemplo 10

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} &= \frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}\\ &= \frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{7-3}\\ &= \frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{4}\\ &= \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

1.7 Números algebraicos y números trascendentes

Recordemos que los números irracionales son por definición los que no son racionales, es decir los que no se pueden escribir como cociente de dos enteros. Ejemplos de números irracionales son $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Los números e y π, que estudiaremos en las siguientes secciones, también son irracionales. Dentro de esta vasta familia de números irracionales, se distinguen dos categorías: los algebraicos y los trascendentes. Los irracionales $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ son algebraicos y los irracionales e y π son trascendentes. Los **números algebraicos** son aquellos que son raíces de ecuaciones polinomiales con coeficientes enteros. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ es algebraico porque es raíz de la ecuación

$$x^2 - 2 = 0$$

El irracional $\sqrt{3}$ es raíz de la ecuación

$$x^2 - 3 = 0$$

El irracional $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ es raíz de la ecuación

$$x^2 + x - 1 = 0$$

Todo racional $\frac{p}{q}$ es algebraico, pues satisface la ecuación

$$qx - p = 0$$

Es un hecho notable que los números π y e no son algebraicos, es decir son números trascendentes. Las pruebas son un tanto difíciles y escapan a los objetivos de este libro, sin embargo, en una sección posterior, se darán algunos datos sobre quiénes lo probaron y cuándo lo hicieron.

1.8 El número *e*

En la historia de la matemática, registrada desde el siglo IV a.C., en la gloriosa época griega, se consideraba, sin duda alguna, que π era el número más famoso e importante. Sin embargo, en la matemática moderna, compite en importancia y fama con el número e, llamado así por su descubridor Leonhard Euler (1707-1783), matemático suizo, considerado el mejor de su época y uno de los más grandes de todos los tiempos.

La aparición del número π en la historia de la matemática, puede considerarse relativamente simple; surge cuando se intenta establecer una relación entre la circunferencia y el diámetro de un círculo. Sin embargo, el número e de Euler, hace su aparición de una manera más sofisticada. A continuación recurrimos a un tema de finanzas para presentar el número e.

Supongamos que cierto capital, C, se invierte al plazo de un año, a una tasa de interés anual de p%. Esto significa que, al término del año, el capital se habrá incrementado, convirtiéndose en una cantidad igual a la inicial invertida C más los intereses generados en ese lapso; así que al término del plazo, el nuevo capital será

$$C + \frac{p}{100}C = \left(1 + \frac{p}{100}\right)C$$

Por ejemplo, si la tasa de interés es de 20% anual, $p = 20$. Al término del año, el capital se habrá incrementado en una quinta parte

$$C + \frac{20}{100}C = \left(1 + \frac{1}{5}\right)C = 1.2C$$

Denotemos con r la fracción $\frac{p}{100}$. Por ejemplo, si la tasa de interés anual es de 8%, $r = 0.08$. Entonces, la expresión para el nuevo capital, al cabo de un año, queda como

$$C + rC = (1 + r)C$$

El cálculo anterior corresponde a lo que se llama inversión con tasa de interés simple anual. Una inversión con tasa de interés compuesto anual es aquella en la que el año se divide en fracciones iguales y los intereses se calculan para una fracción. Esos intereses generados se acumulan al capital original para dar lugar a un nuevo capital, el cual se reinvierte por la siguiente fracción del año y así sucesivamente hasta concluir el plazo, mismo al que se ha establecido la inversión. Esto significa que el capital se incrementará periódicamente mientras dure el plazo de inversión. La fracción del año puede ser un semestre, un mes o un día. Según sea el caso, hablamos de inversiones con una tasa de interés compuesto capitalizable, semestral, mensual o diario.

Una inversión a interés compuesto otorga mayores utilidades que una a interés simple. Ahora, cuantificaremos esas ventajas. Analicemos, por ejemplo, el caso de inversiones capitalizables semestrales.

Supongamos que el capital, C, se invierte a un plazo de un año al interés compuesto, r, capitalizable semestralmente. La utilidad generada durante un semestre será la mitad de la utilidad generada durante el año. Puesto que el interés anual es r, la utilidad generada durante

un año es rC, por tanto, la utilidad generada durante medio año es $\frac{1}{2}rC$. Así que al finalizar el primer semestre, el capital acumulado será

$$C + \frac{r}{2}C = \left(1 + \frac{r}{2}\right)C$$

Dado que se trata de una inversión a un plazo de un año, el capital no se puede retirar al cabo del primer semestre, éste debe mantenerse en inversión un semestre más. Para el segundo semestre, los cálculos son similares a los hechos para el primero, pero ahora con un nuevo capital inicial, el cual es

$$C_1 = \left(1 + \frac{r}{2}\right)C$$

Por tanto, al término del segundo semestre, el capital acumulado será

$$C_1 + \frac{r}{2}C_1 = \left(1 + \frac{r}{2}\right)C_1$$

Al sustituir el valor de C_1 en esta expresión, obtenemos

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{r}{2}\right)C_1 &= \left(1 + \frac{r}{2}\right)\left(1 + \frac{r}{2}\right)C \\ &= \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 C\end{aligned}$$

Así que al término de los dos semestres, el nuevo capital es

$$\left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 C$$

Comprobemos que con un interés compuesto capitalizable semestralmente, se obtiene una utilidad ligeramente mayor, que con un interés simple. Con un interés simple, tenemos una utilidad de rC, mientras que para una inversión con un interés compuesto capitalizable semestralmente, la utilidad es

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 C - C &= \left(1 + r + \frac{r^2}{4}\right)C - C \\ &= C + rC + \frac{r^2}{4}C - C \\ &= rC + \frac{r^2}{4}C\end{aligned}$$

Si comparamos las dos utilidades, inversión simple e inversión compuesta, observamos que la utilidad se ve incrementada en $\frac{r^2}{4}C$.

Para fijar ideas, supongamos que la tasa de interés anual es de 100%, esto significa $r = 1$. En el caso del interés simple, el capital al término del año es $(1 + r)C = 2C$. Es decir, para una inversión con tasa de interés simple de 100%, al cabo del año de la inversión, el capital se duplica. Para el caso de interés compuesto capitalizable semestralmente, el capital al término de los dos semestres es

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 C = \left(\frac{3}{2}\right)^2 C = 2.25\,C$$

Así, resulta muy ventajosa la inversión con tasa de interés compuesto capitalizable semestralmente. Supongamos, ahora, una tasa de interés compuesto capitalizable mensualmente; como podemos intuir, esto todavía resultará más ventajoso. Veamos qué tanto. Que sea capitalizable mensualmente significa que al finalizar cada mes se calculan las utilidades generadas y se incrementan al capital invertido al inicio del mes. Lo que resulte se considera como capital inicial para el segundo mes. Como la utilidad generada durante un año es rC, la que se genera durante el primer mes es $\frac{1}{2}C$. Por tanto, el nuevo capital al inicio del segundo mes será

$$C + \frac{1}{12}C = \left(C + \frac{1}{12}C\right) = \left(1 + \frac{1}{12}\right)C$$

Siguiendo un razonamiento similar para los siguientes meses, obtenemos

Capital al término del primer mes:

$$C_1 = \left(1 + \frac{1}{12}\right)C$$

Capital al término del segundo mes:

$$C_2 = \left(1 + \frac{1}{12}\right)C_1 = \left(1 + \frac{1}{12}\right)^2 C$$

Capital al término del tercer mes:

$$C_3 = \left(1 + \frac{1}{12}\right)C_2 = \left(1 + \frac{1}{12}\right)^3 C$$

Capital al término del cuarto mes:

$$C_{12} = \left(1 + \frac{1}{12}\right)C_3 = \left(1 + \frac{1}{12}\right)^4 C$$

Continuando con este razonamiento, concluimos que la utilidad al final del mes 12 será

$$C_{12} = \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} C$$

Con una calculadora económica podemos obtener la aproximación (aunque no el valor exacto)

$$\left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2.613$$

Así, al concluir el año, plazo fijado de la inversión, el nuevo capital será aproximadamente

$$C_{12} = \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} C \approx 2.613\ C$$

Ahora, la utilidad es significativamente mayor que la obtenida con la tasa de interés capitalizable semestralmente. En la siguiente figura se muestra en qué se convierte el capital para cada uno de los tres tipos de inversiones.

$$C \overset{\text{simple}}{\rightarrow} 2\ C$$

$$C \overset{\text{semestral}}{\rightarrow} 2.25\ C$$

$$C \overset{\text{mensual}}{\rightarrow} 2.613\ C$$

Aplicando este razonamiento, podemos analizar el caso de una inversión con una tasa de interés anual, r, capitalizable cada cierto periodo, que sea la n-ésima parte de un año. De esta forma, al cabo de un año, el capital acumulado será

$$\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n} C$$

Si el interés es capitalizable cada día, al finalizar un año tendremos un capital de

$$\left(1+\frac{r}{365}\right)^{365} C$$

(sin tomar en cuenta los años bisiestos).

Si el interés es capitalizable cada hora, el capital al término del año será

$$\left(1+\frac{r}{8760}\right)^{8760} C$$

Si el interés es capitalizable cada minuto, entonces tendremos

$$\left(1+\frac{r}{365\cdot 24\cdot 60}\right)^{365\ 24\ 60} C$$

como capital final.

Tomemos nuevamente $r = 1$, ahora tenemos

$$\begin{array}{lll} C & \overset{\text{simple}}{\to} & 2\ C \\ C & \overset{\text{semestral}}{\to} & 2.25\ C \\ C & \overset{\text{mensual}}{\to} & 2.613\ C \\ C & \overset{\text{día}}{\to} & 2.7145674\ C \\ C & \overset{\text{hora}}{\to} & 2.7181266\ C \\ C & \overset{\text{minuto}}{\to} & 2.7182814\ C \end{array}$$

Si el interés fuera capitalizable cada segundo, el capital final al término del año sería

$$\left(1+\frac{r}{365\cdot 24\cdot 60\cdot 60}\right)^{365\cdot 24\cdot 60\cdot 60} C = \left(1+\frac{r}{31\,536\,000}\right)^{31\,536\,000} C$$

¿De qué orden de magnitud es el factor?

$$\left(1+\frac{r}{31\,536\,000}\right)^{31\,536\,000}$$

El hecho de que el exponente sea muy grande no significa que este factor sea grande, ya que, en ese caso, la fracción $\frac{r}{31\,536\,000}$ es un número pequeño, por lo que $1+\frac{r}{31\,536\,000}$ tiene un valor aproximado a 1, pero mayor que éste. Al ser mayor que 1, al elevarlo a un exponente grande,

obtenemos un número que podemos esperar sea grande, ¿pero qué tanto? Ocurre un fenómeno muy interesante. En la siguiente tabla aparecen valores aproximados de

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

para distintos valores de n.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000000000000	1 000	2.71692393223552
2	2.25000000000000	10 000	2.71814592682436
3	2.37037037037037	100 000	2.71826823719753
5	2.48832000000000	1 000 000	2.71828046915643
10	2.59374246010000	10 000 000	2.71828169398037
20	2.65329770514442	100 000 000	2.71828178639580
30	2.67431877587030	1 000 000 000	2.71828203081451
50	2.69158802907360	10 000 000 000	2.71828205323479
100	2.70481382942153	100 000 000 000	2.71828205335711

Consideremos los valores de la cuarta columna de la tabla; observemos en ésta que, a medida que crece el valor de n, los primeros decimales comienzan a mantenerse fijos. Por ejemplo, en la tabla es posible ver que los cinco primeros decimales (71828) ya no cambian a partir de $n = 1\,000\,000$. ¿Será cierto que estos decimales ya no cambiarán, aun si incrementamos ilimitadamente el valor de n?

Podríamos pensar ingenuamente que estos decimales ya no cambiarán a medida que hagamos crecer el valor de n, pero no podemos estar seguros de que así sea; quizá podrían ir cambiando todos los decimales, aunque fuese de manera muy lenta. Son estas situaciones para las cuales acudimos al análisis matemático. Es aquí donde requerimos conocer con exactitud cómo es el sistema de los números reales y cómo se comportan los resultados de nuestros cálculos, con el fin de tener la certeza de que lo que estamos suponiendo está ocurriendo. Ciertamente, los decimales 71828 se mantendrán fijos "para siempre"; es decir, se mantendrán fijos para valores suficientemente grandes de n, no importa cuánto hagamos crecer su valor. De hecho, los decimales 71828 ya no se modifican a partir del valor $n = 743325$, para el cual

$$\left(1+\frac{1}{743325}\right)^{743325} \approx 2.7182800000001098541$$

Un hecho interesante es que la sucesión de números que se genera con la expresión

$$a_{n=}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Arquímedes (287-217 a.C.)

Considerado el más destacado matemático e inventor griego, nació en la famosa ciudad de Siracusa; hijo del astrónomo Fidias. Estudió en la Universidad de Alejandría, donde tuvo como maestro a Conón de Samos (uno de los sucesores de Euclides).

Durante la invasión a Siracusa, Arquímedes inventó ingeniosas máquinas para apoyar la defensa. A él se le atribuye la creación de la catapulta de largo alcance y un sistema de espejos y lentes que concentraba los rayos solares para incendiar los barcos enemigos.

Con sus trabajos científicos, Arquímedes hizo una aportación original a la matemática y a la física; abordan la geometría plana y del espacio, la aritmética, la mecánica, la hidrostática y la astronomía, además de que dan constancia del descubrimiento de nuevos conocimientos.

En el campo de la mecánica, Arquímedes estableció la ley de la palanca y es considerado el inventor de la polea compuesta y del *tornillo sin fin*, el cual servía para elevar el agua de un nivel a otro. Pero, su contribución más reconocida es el principio de la hidrostática, el cual lleva su nombre: **Principio de Arquímedes**. Aunque no fueron menos notables sus trabajos acerca de la cuadratura del círculo y el descubrimiento de la relación aproximada entre la circunferencia y su diámetro, la cual actualmente se designa con la letra griega π (pi).

Arquímedes escribió más de 10 obras científicas, entre las que destacan: *Primer libro de los equilibrios, Cuadratura de la parábola, Segundo libro de los equilibrios, Sobre la esfera y el cilindro, Sobre las espirales, Sobre los conoides y los esferoides, Medida del círculo, Arenario, Los cuerpos flotantes* y *El tratado del método*. La última es una bella obra que muestra el gran ingenio de Arquímedes. En ésta *es donde* se anticipa a las ideas del cálculo integral actual.

crece conforme lo hace el valor de n, aunque también lo es, como lo probaremos más adelante, que ninguno de estos números a_n rebasa el 3, no importa qué valor le demos a n. Basados en estos hechos, las propiedades de los reales nos garantizarán que la sucesión de números a_n tiende a un cierto número fijo, del cual sus primeros decimales son 71828. Llamaremos a este número: el límite de la sucesión que generamos con la expresión anterior. No es posible calcular el valor exacto de éste, en el sentido de que no es posible determinar o conocer todos sus decimales. La existencia del límite de la sucesión está garantizada por las propiedades de los números reales. Ésta es una de las razones por las cuales es importante estudiar los números reales. El número al cual tiende la sucesión de números a_n es muy importante en la matemática y se denota por la letra e.

En simbología matemática, la definición del número e se expresa como

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Como hemos comentado antes, el número e fue descubierto por Leonhard Euler, quien obtuvo hasta 23 decimales del mismo.

$$e = 2.71828182845904523536028.$$

El número e es un número irracional y en la actualidad es posible calcular una gran cantidad de decimales para e y otros números irracionales con una computadora de escritorio. Por ejemplo, hemos calculado 32 766 decimales del número e, los cuales aparecen al margen de este libro.

El número e será de gran importancia cuando estudiemos funciones.

1.9 El número π

La historia de π es interesante, fascinante, trágica y divertida. Está asociada con diversos episodios de la historia del hombre. El problema para hallar el valor de ésta fue motivo de una gran cantidad de trabajos que intentaron su cálculo. Algunos de los trabajos sobre π incidieron con fuerza en el avance y el desarrollo de las matemáticas en general.

Según los historiadores, el origen de π se remonta a la época de los babilonios y los egipcios. Uno de los documentos que dejaron constancia de su antigüedad es el papiro de Ahmes, también conocido como papiro Rhind o papiro de Rhind. Este documento, cuyas medidas aproximadas son 6 m de largo por 33 cm de ancho, se encuentra en el museo británico de Londres y se conserva en buen estado. Se halló en las ruinas egipcias ubicadas en Luxor, al centro-sur de Egipto, en el siglo XIX y fue adquirido por el inglés Henry Rhind en 1858, de ahí su nombre.

El papiro Rhind fue escrito por el escriba *Ahmes*, hacia el año 1650 a.C.; contiene 87 problemas matemáticos de aritmética, fracciones, cálculo de áreas y volúmenes, progresiones, repartos proporcionales, reglas de tres, ecuaciones lineales y trigonometría. Según los estudiosos de este papiro, también aparece la afirmación de que el área de un círculo es como la de un cuadrado cuyo lado es $\frac{8}{9}$ del diámetro. Si traducimos esto a fórmulas, obtenemos que el área del círculo es

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{8}{9}d\right)^2 \\ &= \frac{64}{81}(2r)^2 \\ &= \frac{64 \cdot 4}{81}r^2 \\ &\approx 3.16\, r^2 \end{aligned}$$

Así que, hace unos 3650 años ya se utilizaba la aproximación $r \approx 3.16$.

Hoy día, la constante π se asocia al notable científico griego Arquímedes, quien vivió en el siglo II a.C. Arquímedes, también considerado el primer ingeniero de la humanidad por sus útiles trabajos de carácter práctico, en su breve, pero interesante, tratado de medida del círculo, prueba con gran ingenio los siguientes tres resultados acerca de éste.

a) Todo círculo es equivalente a un triángulo rectángulo, cuyos catetos sean iguales al radio y a la circunferencia del círculo.

b) Un círculo es al cuadrado de su diámetro aproximadamente como 11 es a 14.

c) La circunferencia de todo círculo es menor que tres veces el diámetro más $1/7$ del mismo diámetro y es mayor que tres veces más $10/71$ del diámetro.

En la proposición *a*), Arquímedes establece una fórmula para el área del círculo. De esta proposición, se sigue que si r es el radio del círculo y L es la circunferencia (perímetro del círculo), entonces el área del círculo está dada por

$$\frac{1}{2}Lr$$

Esta fórmula es válida aun cuando no conozcamos una para calcular la circunferencia L. Cualquier fórmula para L dará una fórmula para el área del círculo. Si asumimos que la circunferencia está dada por $L = d\pi = 2r\pi$, entonces obtenemos la fórmula del área del círculo en términos de π:

$$\frac{1}{2}rL = \pi r^2$$

Por otra parte, de la proposición *b*) obtenemos que si el círculo es de radio 1, entonces su área es π, y esta área es al cuadrado de su diámetro $d = 2r = 2$, aproximadamente como 11 es a 14, es decir

$$\frac{\pi}{2^2} \approx \frac{11}{14}$$

O sea

$$\pi \approx 4\left(\frac{11}{14}\right)$$
$$\pi \approx \frac{22}{7}$$

Con lo que obtenemos la famosa aproximación de Arquímedes

$$\pi \approx \frac{22}{7}$$

Por otra parte, la proposición *c*) se traduce en símbolos como

$$\frac{223}{71} = 3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$$

Cualquiera de los extremos de esta doble desigualdad es una aproximación para π.

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

Usando decimales de las desigualdades anteriores, obtenemos

$$3.140845070 < \pi < 3.142857143$$

La desigualdad de su proposición *c*), nos revela el hecho de que Arquímedes sabía muy bien que sólo se pedía aspirar a tener aproximaciones de π y no su valor exacto. Algunos pueden no estar de acuerdo con esta apreciación, pero Arquímedes era un genio, el descubrimiento y las demostraciones de muchísimas de sus proposiciones dan cuenta de ello. Si π hubiese sido un número racional, es seguro que Arquímedes lo hubiera sabido y calculado. No es exagerado considerar a Arquímedes como el padre de π, fue un protagonista importantísimo en la historia de esta constante.

Como episodio trágico de la historia de π, podemos citar aquel que se relaciona con la muerte de Arquímedes, quien nació en Siracusa, Sicilia, en el año 287 a.C. Arquímedes pudo haber tenido un cargo importante por su parentesco con Hierón II, rey de Siracusa, sin embargo decidió dedicarse a la ciencias, estudiando en la universidad de Alejandría con los descendientes académicos de Euclides o quizá con Euclides mismo. Según Plutarco, historiador y biógrafo griego, autor de *Vidas paralelas*, Arquímedes ofreció sus servicios al Rey Hierón para la defensa de su ciudad natal ante la invasión del general romano Marcelo. Arquímedes inventó las famosas catapultas y juegos de lentes y espejos con los que hundía y quemaba con los rayos solares las naves de los agresores. Sin embargo, los habitantes de Siracusa, quienes se sentían protegidos con la gran maquinaria de guerra de Arquímedes, descuidaron su defensa, por lo que los romanos ocuparon la ciudad. Narra Plutarco que estando Arquímedes reflexionando sobre algunas figuras geométricas, fue sorprendido por un soldado que le exigió lo acompañara con Marcelo, a quien sería entregado. Arquímedes le pidió al soldado que le diera tiempo mientras encontraba la solución del problema, a lo que el soldado enfurecido le respondió clavándole su espada para herirlo de muerte. Con este suceso se puso fin a la vida del gran genio Arquímedes. Marcelo despidió con desprecio al soldado que dio muerte a Arquímedes y cuenta Plutarco que buscó a los familiares de Arquímedes para tratarlos con aprecio y distinción.

1.9.1 Fórmulas notables para π y el cálculo de sus decimales

Una etapa importante en la historia de π, la constituye el periodo cuando se desarrollaron los métodos de análisis matemático para llevar a cabo cálculos aproximados de π. Los recursos analíticos de los que disponían los calculadores de π, o que desarrollaron ellos mismos, fueron series y productos infinitos, relaciones trigonométricas y fracciones continuas. A continuación citamos algunos ejemplos de estas fórmulas, así como el número de decimales que los autores obtuvieron. Los lectores interesados en obtener más información al respecto, pueden consultar una serie de tres artículos dedicada a dar cuenta de estos acontecimientos, "The chronology of pi", de Herman C. Schepler, publicados en la revista *Mathematics Magazine*, en 1950.

A partir de aquí, haremos un recuento de las fórmulas notables para π, siguiendo una secuencia cronológica.

1579. Francois Vieta (1540-1603), matemático francés, fue el primero en usar un producto infinito

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

Siguiendo el método griego, considera polígonos con $6 \cdot 2^{16} = 393{,}216$ lados y calcula nueve decimales correctos de $\pi = 3.141592653$.

1650. John Wallis (1616-1703), matemático inglés, obtiene la interesante expresión

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdots}$$

y la fracción continua

$$\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cdots}}}}}$$

1668. James Gregory (1638-1675), matemático escocés, aplica la serie de potencias

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

y haciendo $x = 1$, obtiene la serie

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

(Estudiaremos la función arctan x más adelante.)

1673. Esta serie también es descubierta de manera independiente por el filósofo, abogado y matemático alemán Gottfried Wilhelm von Leibniz, quien también escribe dicha serie como

$$\frac{\pi}{4} = 1 - 2\left[\frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{7 \times 9} + \frac{1}{11 \times 13} + \frac{1}{15 \times 17} + \cdots\right]$$

1690. Abraham Sharp (1651-1742), matemático inglés, calcula π con 72 decimales, resultan correctos 71. Este valor se obtiene mediante la serie del $\arctan x$, tomando $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$, la cual da

$$\frac{\pi}{6}=\sqrt{\frac{1}{3}}\left[1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{3^2\cdot 5}-\frac{1}{3^3\cdot 7}+\frac{1}{3^4\cdot 9}-\cdots\right]$$

1706. John Machin (1680-1752), de nacionalidad inglesa, usando la fórmula

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$$

y la serie de potencias para $\arctan x$, obtuvo 100 decimales correctos de π.

1776. Hutton (1737-1823), nacido en Inglaterra, sugiere usar las fórmulas

$$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}$$

y

$$\frac{\pi}{4}=5\arctan\frac{1}{7}+2\arctan\frac{3}{79}$$

1779. Leonhard Euler (1707-1783), de origen suizo, obtiene la fórmula

$$\pi = 20\arctan\frac{1}{7} + 8\arctan\frac{3}{79}$$

1841. William Rutherford, de nacionalidad inglesa, usa la fórmula

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{70}+\arctan\frac{1}{99}$$

Rutherford calcula 208 decimales de π, de los cuales 152 resultan correctos.

1844. Zacharias Dase (1824-1861), de Alemania, usa la fórmula

$$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8}$$

para calcular 205 decimales π, de los cuales 200 resultan correctos.

1847. Thomas Clausen (1801-1885), de Alemania, usa la fórmula

$$\frac{\pi}{4}=2\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$$

para calcular 250 decimales π, de los cuales 248 fueron correctos.

1853. William Rutherford, de origen inglés, calcula 440 decimales de π, todos correctos.

1873. William Shanks (1812-1882), matemático inglés, usando la fórmula de Machin, calcula 707 decimales correctos.

1945. Ferguson descubre que hay errores a partir del decimal 528 de los 707 decimales que calculó Shanks en 1873.

1946. Ferguson publica 620 decimales.

1947. Ferguson, con la ayuda de una calculadora electrónica, encuentra 808 decimales.

1949. Con la ayuda de una computadora ENIAC, de la Armada de los Estados Unidos de América, Ferguson calculan 2 035 decimales. El cálculo le lleva 70 horas, mientras que a Shanks le tomó 15 años hacer sus cálculos, para que de los 707 decimales, resultaran correctos sólo 527.

1955. La computadora NORC es programada para calcular 3 089 decimales.

1957. La computadora Pegasus, en Londres, calcula 7 480 decimales.

1959. La IBM 704, instalada en París, Francia, calcula 7 480 decimales.

1961. La IBM 7090, instalada en Nueva York, calcula 100 000 decimales.

1966. Con la IBM 7030, instalada en París, es posible calcular 250 000 decimales.

1967. Con la CDC 6 600, en París, se calculan 500 000 decimales.

1973. Con la CDC 7 600, se calculan 1 001 250 decimales.

1986. Con una CRAY 2, se calculan 29 millones de decimales.

1989. Con la IBM 3 090, se calculan un 1 000 millones de decimales.

2002. Con una Hitachi SR8000/MP, se calculan 1.2 trillones de decimales de π.

En esta época moderna, de poderosos avances en la tecnología, aplicados a los equipos de cómputo, se han podido calcular varios miles de millones de cifras decimales de π. Hoy en día, además de contar con una gran cantidad de relaciones matemáticas que nos permiten calcular π, también disponemos de poderosas computadoras de escritorio o portátiles, con las cuales es posible, desde nuestra propia casa, calcular 10 000 decimales de π en alrededor de un segundo y si somos pacientes y estamos dispuestos a esperar 90 segundos podemos calcular 100 000 decimales. Por supuesto, con las supercomputadoras actuales es posible calcular varios miles de millones de decimales.

1.9.2 Fechas notables sobre π

1706. El matemático inglés William Jones (1675-1749) usa por primera vez la letra π para designar la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro.

1766. El físico, matemático y astrónomo alemán Johann Heinrich Lambert (1728-1777) prueba que π es irracional.

1794. El matemático francés Andrien Marie Legendré (1752-1833) utiliza en su libro *Eléments de géométrie* el símbolo π para representar la razón de la circunferencia al diámetro. Éste es el primer libro de texto francés en el que se usa π de forma regular; en él aparece una prueba de la irracionalidad de π y de π^2.

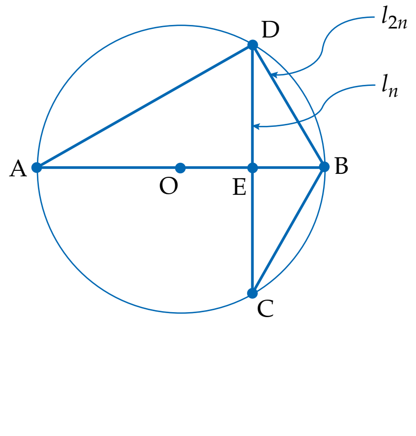
1882. El matemático alemán Ferdinand Lindemann (1840-1909) prueba que π es trascendente, es decir, no es raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros.

Desde 1766 se sabe que π es un número irracional, lo que en particular significa que su expansión decimal es infinita no periódica, así que los intentos por conocer cada vez más decimales no partieron de obedecer al hecho de determinar algún periodo, al menos no para los matemáticos enterados. Sin embargo, todavía hacia finales del siglo XIX hubo quienes afirmaban que habían encontrado el verdadero valor racional de π. Quizá, hoy en día, todavía haya quienes, esperando que Lindemann se haya equivocado y buscando la inmortalidad, intenten probar que π es racional o al menos algebraico.

Usando técnicas del análisis matemático, se puede probar que la posibilidad de que π sea algebraico, equivale a que es posible cuadrar el círculo, es decir, dado cualquier círculo es posible construir con regla y compás un cuadrado con la misma área del círculo dado. Por tanto, dado que en 1882 Lindemann demostró que π no es algebraico, tenemos una prueba indirecta de que es imposible cuadrar el círculo. Éste es uno de los famosos problemas griegos que permaneció más de 2 000 años sin resolver. Aún así, es probable que hoy en día haya quienes busquen cuadrar el círculo, como dijo H. Schubert en su libro *The squaring of the circle* (en español, *La cuadratura del círculo*): "la raza de los cuadradores de círculos no morirá en tanto la ignorancia y el deseo de gloria permanezcan unidos".

1.9.3 Una definición analítica de π

Hasta ahora sólo tenemos una definición geométrica de π. Una definición aritmética, o más bien, analítica requiere de conceptos que van más allá de la aritmética elemental y requiere del concepto de límite, el cual pertenece al terreno del cálculo. A reserva de establecer con toda la precisión y el rigor matemático que corresponde a un censo de cálculo universitario, lo cual haremos en el capítulo 4, en este momento analizaremos las ideas principales que permiten definir π analíticamente. Consideremos el círculo unitario y el polígono regular de n lados inscrito en este círculo. Sea l_n la longitud del lado. El perímetro del polígono es entonces $P_n = nl_n$. A partir de este polígono regular de n lados, es fácil construir el polígono regular inscrito de $2n$ lados. Para cada lado tracemos el radio del círculo que pasa por su punto medio. De esta manera, determinamos puntos sobre el círculo que, aunados con los vértices del polígono original, constituyen los vértices de un nuevo polígono inscrito de $2n$ lados, como se muestra en la siguiente figura



Calculemos la longitud l_{2n} del lado del polígono de $2n$ lados en términos de la longitud l_n del lado del polígono de n lados. En la figura anterior, ΔABD es un triángulo rectángulo con hipotenusa $AB = 2$. Calculemos el área del triángulo ΔABD de dos maneras. La primera de ellas es tomando como base el cateto AD y altura el otro cateto que es l_{2n}; en este caso, el área está dada por $\frac{1}{2}(AD)l_{2n}$. Ahora bien, si tomamos como base la hipotenusa $AB = 2$, la altura será la longitud del segmento DE, que es igual a $\frac{1}{2}l_n$, y el área estará dada por $\frac{1}{2}(2)\frac{l_n}{2} = \frac{l_n}{2}$. Al igualar estas dos expresiones para el área, obtenemos

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(AD)l_{2n} &= \tfrac{1}{2}l_n \\ (AD)l_{2n} &= l_n \end{aligned}$$

Por otra parte, del teorema de Pitágoras se sigue que

$$AD = \sqrt{4 - l_{2n}^2}$$

de donde obtenemos

$$l_{2n}\sqrt{4 - l_{2n}^2} = l_n$$

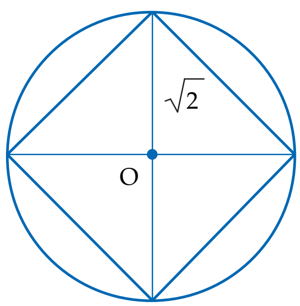
La fórmula anterior nos permite calcular el lado l_n del polígono de n lados cuando se conoce el lado del polígono de $2n$ lados. Nosotros requerimos el lado l_{2n} en términos del lado l_n, así que despejaremos l_{2n} de la relación anterior que es una ecuación cuadrática en l_{2n}^2:

$$\begin{aligned} l_{2n}^2(4 - l_{2n}^2) &= l_n^2 \\ l_{2n}^4 - 4l_{2n}^2 + l_n^2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación, tenemos

$$\begin{aligned} l_{2n}^2 &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4l_n^2}}{2} \\ l_{2n}^2 &= \frac{4 \pm 2\sqrt{4 - l_n^2}}{2} \\ l_{2n}^2 &= 2 \pm \sqrt{4 - l_n^2} \end{aligned}$$

Para elegir el signo correcto, notemos que el lado l_{2n} no puede ser mayor que $\sqrt{2}$, pues el cuadrado inscrito precisamente tiene por lado $\sqrt{2}$.



Así que la longitud de lado de cualquier polígono con mayor número de lados, es menor que $\sqrt{2}$. Por tanto, en la fórmula anterior debemos elegir el signo negativo. O sea

$$l_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}}$$

De esta fórmula podemos obtener, por ejemplo, el lado del octágono inscrito a partir del cuadrado cuyo lado mide $\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} l_8 &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_4^2}} \\ l_8 &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - 2}} \\ l_8 &= \sqrt{2 - \sqrt{2}} \end{aligned}$$

El lado del dodecágono inscrito lo obtenemos a partir del hexágono cuyo lado mide 1:

$$\begin{aligned} l_{12} &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_6^2}} \\ l_{12} &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - 1}} \\ l_{12} &= \sqrt{2 - \sqrt{3}} \end{aligned}$$

Por otra parte, de la fórmula $l_{2n}\sqrt{4 - l_{2n}^2} = l_n$, podemos obtener el lado del pentágono a partir del lado del decágono, el cual mide

$$l_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

La obtención de este último se deja como ejercicio para el lector.

Para obtener la longitud del lado del pentágono, observemos primero que

$$\begin{aligned} l_{10}^2 &= \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

De esta forma

$$\begin{aligned} 4 - l_{10}^2 &= 4 - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Por tanto, la longitud del lado del pentágono está dada por

$$\begin{aligned} l_5 &= l_{10}\sqrt{4 - l_{10}^2} \\ &= \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \end{aligned}$$

Pero

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{5}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}} &= (\sqrt{5}-1)\sqrt{(\sqrt{5}+1)\sqrt{5}} \\
&= \sqrt{\sqrt{5}-1}\sqrt{\sqrt{5}-1}\sqrt{(\sqrt{5}+1)\sqrt{5}} \\
&= \sqrt{\sqrt{5}-1}\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)(\sqrt{5}+1)\sqrt{5}} \\
&= \sqrt{\sqrt{5}-1}\sqrt{4\sqrt{5}} \\
&= 2\sqrt{\sqrt{5}-1}\sqrt{\sqrt{5}} \\
&= 2\sqrt{5-\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

De donde obtenemos finalmente

$$
\begin{aligned}
l_5 &= \frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}
\end{aligned}
$$

Ésta es la longitud del lado del pentágono inscrito en el círculo de radio 1.

Retornemos al cuadrado inscrito en el círculo unitario cuyo lado es $l_4 = \sqrt{2}$. A partir de este cuadrado y por el método de bisección de los lados, generamos los polígonos con número de lados 2, 4, 8. . . Estos números son de la forma 2^n. Aplicando recursivamente la fórmula $l_{2n} = \sqrt{2-\sqrt{4-l_n^2}}$, obtenemos las longitudes de los lados correspondientes:

$$
\begin{aligned}
l_4 &= \sqrt{2} \\
l_8 &= \sqrt{2-\sqrt{2}} \\
l_{16} &= \sqrt{2-\sqrt{4-l_8^2}} = \sqrt{2-\sqrt{4-(2-\sqrt{2})}} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\
l_{32} &= \sqrt{2-\sqrt{4-l_{16}^2}} = \sqrt{2-\sqrt{4-(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})}} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}
\end{aligned}
$$

Se puede probar que en general se tiene

$$
l_{2^n} = \sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n-2 \text{ raíces encajadas}}}
$$

Así que el perímetro del polígono de 2^n lados está dado por

$$
P_{2^n} = 2^n l_{2^n} = 2^n\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n-2 \text{ raíces encajadas}}}
$$

Cuando n es grande, este perímetro se aproximará al perímetro del círculo unitario que definimos como 2π (definición de π). Como el límite geométrico de estos polígonos es el círculo unitario, diremos que el límite estos perímetros es 2π y escribimos:

$$\lim_{n\to\infty} P_{2n} = \lim_{n\to\infty} 2^n \sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n-2 \text{ raíces encajadas}}} = 2\pi.$$

En el capítulo 4 precisaremos el concepto de límite; por el momento es suficiente con tener una idea intuitiva del mismo, aunque el ejemplo sirve para motivar y mostrar la necesidad de este concepto.

Así que podemos adoptar como definición aritmética del número π el límite anterior, o mejor aún:

Definición. El número π es el siguiente límite.

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^n \sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n-1 \text{ raíces encajadas}}}$$

A título de resumen presentamos las definiciones de los números e, π y γ:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^n \sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n-1 \text{ raíces encajadas}}}$$
$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

En el capítulo 4 desarrollaremos, también, la teoría sobre sucesiones, con la cual probaremos que efectivamente existen estos límites. Ahora sólo baste presentar valores aproximados de estos números:

$$e \approx 2.718281828$$
$$\pi \approx 3.141592653$$
$$\gamma \approx 0.5772156649$$

Para finalizar esta sección dedicada a la historia de π, comentaremos sobre un episodio que pudiera parecernos chusco o divertido. Se refiere a Edward Johnston Goodwin, físico y matemático aficionado, quien vivía en una pequeña ciudad del condado de Posey, estado de Indiana, Estados Unidos de América, y publicó en *The American Mathematical Monthly*, hacia 1894, un artículo con el título "Cuadratura del círculo". En éste, Goodwin obtuvo el valor 3.2 para π, por lo cual aclara que había registrado su valor de 3.2 en los registros de propiedad intelectual de Estados Unidos de América, Gran Bretaña, Alemania, Francia, España, Bélgica y Austria.

Lo interesante de este caso es que en 1896 Goodwin se reunió con Taylor I. Record, representante del condado de Posey en el parlamento estatal de Indiana, para pedirle que llevara un proyecto de ley ante la Cámara Baja, la cámara de representantes de Indiana, con lo cual intentaba que se legislara el valor de π, que él había descubierto, con el fin de ofrecerlo como una contribución a la educación y para que este resultado fuese utilizado sin costo alguno para el estado de Indiana. De esta forma, el resto de los estados deberían pagar los derechos de autor. El 18 de enero de 1897, Taylor presentó a la Cámara el "Proyecto de ley que introduce una nueva verdad matemática". Copias de éste se conservan en la división de archivos de la biblioteca estatal de

Indiana. El texto completo también fue reimpreso en un artículo de Edington, E., en el *Proceedings of the Indiana Academy of Sciences*, vol. 44, pp. 206-210, publicado en 1935.

Después de pasar por el comité de tierras húmedas (algo extraño) y por el comité de educación, el proyecto fue turnado, por este último, a la Cámara Baja para su aprobación. El proyecto fue aprobado el 5 de febrero de 1897, por 67 votos a favor y ninguno en contra.

Cinco días después, como muestra de la gran eficiencia los legisladores, el proyecto de ley es remitido a la Cámara del Senado, con la recomendación de que se aprobara la ley. Por fortuna, mientras la Cámara Alta consideraba ese proyecto, coincidió que el profesor C. A, Waldo, catedrático de matemáticas en la universidad de Purdue, quien casualmente estaba en la cámara por un asunto de la universidad, quedó sorprendido al descubrir que ese mismo día se iba a debatir un proyecto de ley sobre un tema matemático.

En un artículo que escribió después, Waldo comentó: "Un exprofesor del este de Indiana decía: —El caso es muy simple. Si aprobamos este proyecto de ley que establece un nuevo y correcto valor de π, el autor ofrece a nuestro estado, sin costo alguno, el uso de su descubrimiento y su libre publicación en nuestros libros de texto escolares, mientras que todos los demás estados deberán pagarle derechos de autor".

El proyecto fue aprobado en una primera instancia en el Senado, pero después de que el profesor Waldo se entrevistó con algunos senadores, este órgano, en una segunda instancia, acordó posponer la discusión para una nueva sesión. A la fecha, este proyecto de ley está pendiente en la agenda del Senado del Estado de Indiana.

1.10 Desigualdades

Algunas propiedades de los números reales relacionadas con las desigualdades son fundamentales para el cálculo, pues con frecuencia se aplican en el estudio de funciones. La relación $a < b$, que también se escribe $b < a$, significa que $b - a$ es un número positivo. Es importante recordar esta interpretación de la desigualdad, pues varias de las propiedades de las desigualdades se recuerdan con facilidad cuando se usa este hecho.

Dentro de las propiedades sobre desigualdades destacan:

- Si a ambos miembros de una desigualdad se adiciona un mismo real, sea positivo o negativo, la desigualdad se preserva. Con símbolos esta propiedad se escribe:

$$\text{Si } a < b, \text{ entonces } a + c < b + c \text{ para cualquier número } c.$$

- Si ambos miembros de una desigualdad se multiplican por un mismo número positivo, la desigualdad se preserva. En símbolos se escribe:

$$\text{Si } a < b \text{ y } c \text{ es cualquier número positivo, entonces } ac < bc.$$

- Si ambos miembros de una desigualdad se multiplican por un mismo número negativo, la desigualdad se invierte. En símbolos se escribe:

$$\text{Si } a < b \text{ y } c \text{ es cualquier número negativo, entonces } ac > bc.$$

Estas propiedades permiten, por ejemplo, comparar las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ y $h(x) = x^4$ en el intervalo $0 < x < 1$ y para $1 < x$.

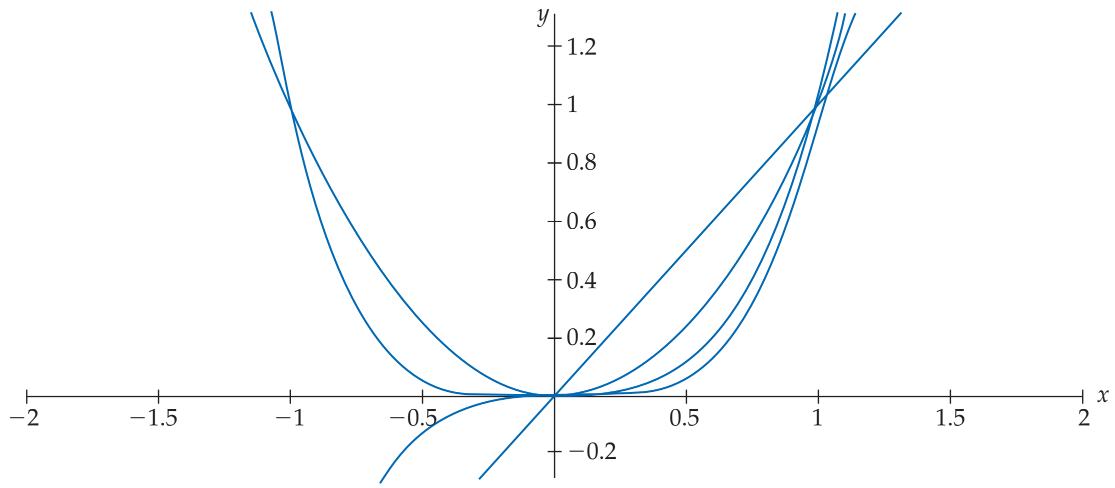
Si $x > 0$, entonces podemos multiplicar por x ambos miembros de la desigualdad $x < 1$, sin que se altere el orden de la desigualdad. Multiplicando sucesivamente obtenemos

$$\begin{aligned} x &< 1 \\ x^2 &< x \\ x^3 &< x^2 \\ x^4 &< x^3 \end{aligned}$$

Por otra parte, si partimos de la desigualdad $x > 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} x &> 1 \\ x^2 &> x \\ x^3 &> x^2 \\ x^4 &> x^3 \end{aligned}$$

La interpretación geométrica de las desigualdades anteriores se ilustra con las siguientes gráficas

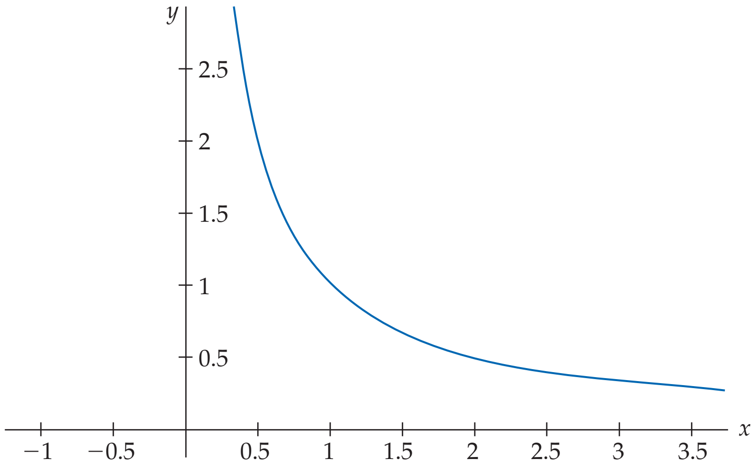


Una propiedad importante que se deduce de las antes enunciadas, es la siguiente

- Si a y b son números positivos tales que $a < b$, entonces $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$.

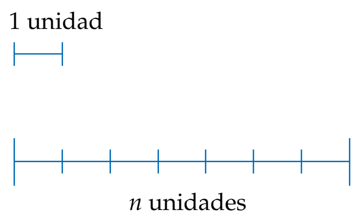
Esta propiedad se prueba multiplicando por $\dfrac{1}{ab}$ ambos miembros de la desigualdad $a < b$.

Una consecuencia de la propiedad anterior es que la función $F(x) = \dfrac{1}{x}$ es decreciente para $x > 0$. En efecto, si $x_1 < x_2$, entonces $\dfrac{1}{x_2} < \dfrac{1}{x_1}$, pero esto significa $f(x_2) < f(x_1)$.

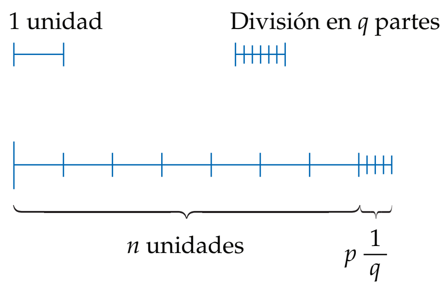


1.11 Los números reales. Una reflexión

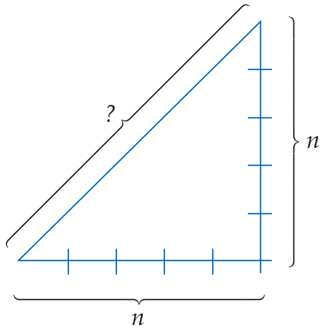
Los números enteros nos permiten medir segmentos cuyas longitudes son múltiplos enteros de una unidad dada (las mediciones son relativas a una unidad convenida).



Por otra parte, los números racionales nos permiten medir segmentos cuyas longitudes son múltiplos enteros de la unidad, más fracciones de la unidad.



Desde un punto de vista práctico, se puede decir que para resolver los problemas de medición de longitudes son suficientes los números racionales; pero, desde un punto de vista teórico, éstos son insuficientes. Por ejemplo, los griegos ya sabían que para cualquier elección de la unidad de longitud, era imposible medir la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo de catetos iguales y cuyas longitudes fuesen un número entero n de unidades. Esta imposibilidad se da, aún considerando las fracciones enteras de la unidad, es decir, aún considerando los números racionales.



Ahora, nuestro sistema de números nos permite asignar el valor $\sqrt{2}n$ a la longitud de la hipotenusa. Como podemos intuir, hay una infinidad de segmentos cuya longitud no es posible medir utilizando sólo números racionales. Por ejemplo, la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son 1 y 2, tampoco se puede medir usando sólo racionales; con nuestro sistema de números, ahora decimos que la hipotenusa mide $\sqrt{5}$. En general, para medir cualquier segmento es necesario acudir a los números reales, con los cuales es posible hacerlo. Ésta es una de las principales virtudes de los reales: nos permiten medir la longitud de cualquier segmento de recta.

Otra manera de expresar esta propiedad, es diciendo que es posible poner a los números reales en correspondencia con todos los puntos de la recta infinita. Esto no ocurre con los números racionales, ya que éstos no se pueden poner en correspondencia con los puntos de la recta infinita.

Cuando ubicamos los racionales en la recta infinita, es decir, cuando asignamos todos los racionales a los puntos de la recta, quedarán una infinidad de puntos sin asignárseles algún racional. Es aquí donde entran los irracionales, con los cuales se completa la asignación y quedan cubiertos todos los puntos de la recta. En este sentido, los números reales (racionales e irracionales) son un sistema completo. Además de que los reales son suficientes para cubrir todos los puntos de la recta física, ocurre también que no queda un real sin ser asignado. En esta asignación, se agotan los puntos de la recta y se agotan los números reales. Esto es lo que se quiere expresar cuando se dice que los reales se ponen en correspondencia con los puntos de la recta. En matemáticas se dice que los reales y los puntos de la recta se ponen en correspondencia uno a uno.

Si todos los racionales los asignamos a puntos de la recta, habrá una infinidad de puntos de la recta que no tengan algún racional asignado, un hecho que resulta difícil de comprender es que esta infinitud es mayor que la de puntos de la recta a los cuales se les han asignado los racionales. Con base en la teoría de los "números infinitos", desarrollada por el famoso matemático alemán George Cantor, no todos los infinitos son iguales; hay unos más grandes que otros. Desde el punto de vista de esta teoría, la cantidad infinita de irracionales es mayor que la cantidad infinita de racionales, que son los números que mejor conocemos. En este sentido, se puede decir que hay más irracionales que racionales.

Siendo la infinitud de los irracionales mayor que la de los racionales, surge una interesante pregunta: ¿qué son los números irracionales?, la cual nos lleva a otra: ¿qué son los números reales? No obstante que hay una infinidad de números irracionales, apenas conocemos algunos de ellos. Además, carecemos de una definición de los números reales, a nos ser la de las expansiones decimales. Pero, requerimos una definición de otra naturaleza, pues muchos de los números irracionales que hemos ido conociendo, no se nos presentaron a través de sus expansiones

decimales. La aritmética con los reales no la llevamos a cabo usando las expansiones decimales, por cierto, infinitas. Además, aún no hemos precisado el concepto de expansión decimal, ni mucho menos tenemos reglas aritméticas para operarlas.

La expansiones decimales son una representación de los reales; en la práctica nos auxiliamos de expansiones decimales finitas para llevar a cabo cálculos aritméticos, pero las expansiones decimales finitas son aproximaciones de los reales.

Si hacemos una reflexión sobre cómo es que adoptamos los números reales y trabajamos con ellos, llegaremos a la conclusión de que aceptamos su existencia casi por decreto. Vale decir que asumimos su existencia y que operamos con ellos a través de sus propiedades, mismas que aceptamos como postulados. Ésta es la concepción sobre los números reales que adopta en este libro.

1.11.1 A manera de resumen

Los números reales constituyen un conjunto de objetos dotados de las mismas propiedades aritméticas o algebraicas que los números racionales. Los reales también gozan de las propiedades de las desigualdades, como las que tienen los racionales. Sin embargo, los reales tienen la ventaja sobre los racionales de que son suficientes para asignarlos a todos los puntos de la recta infinita. A cada punto de la recta infinita, le queda asignado un número real y no hay reales que no sean asignados; en esta asignación se agotan, simultáneamente, puntos y reales. La recta interpretada así, la llamaremos **recta real**. Entonces, la recta real es una recta física ideal que tiene asignado un número real a cada uno de sus puntos. Los reales “cubren” toda la recta. Debido a que ésta es un objeto físico idealmente continuo, diremos que los reales son un sistema continuo de números. Una respuesta “simple”, pero profunda, a la pregunta ¿qué son los números reales?, es:

El sistema de los números reales es un campo ordenado continuo.

Cuando se dice que el sistema de los números reales es un campo, se quiere decir que la suma y la multiplicación entre ellos tienen propiedades algebraicas, como las tienen la suma y la multiplicación de los racionales. Cuando se dice que el campo de los reales es ordenado, se quiere decir que en éste existe el concepto de desigualdad con todas las propiedades antes expuestas y, finalmente, cuando se dice que es un campo ordenado continuo, podemos entender, por el momento, que es posible poner los reales en correspondencia uno a uno con los puntos de la recta física, que idealmente es un continuo, lo que significa que idealmente no tiene interrupciones o agujeros. En el capítulo 4, expresaremos en términos puramente aritméticos (no geométricos) lo que significa que los reales sean un continuo.

1.12 Valor absoluto

El **valor absoluto** desempeña un papel muy importante en el cálculo diferencial; por ejemplo, nos permite cuantificar la proximidad que pueden tener dos números, la cual llamaremos distancia entre los números. La noción de distancia entre números es la base para hablar de límites, lo cual, a su vez, es fundamental para el importantísimo concepto de derivada. El valor absoluto de

un número real x, positivo o negativo, es el número desprovisto de su signo; en términos precisos, lo definimos como sigue.

Definición

El **valor absoluto** de un real x, que denotaremos por $|x|$, es

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Por ejemplo $|3| = 3$, $|-5.1| = 5.1$.

Observemos que el valor absoluto de un número es no negativo, de hecho, a excepción de $x = 0$, el valor absoluto $|x|$ siempre es positivo. De esto se sigue que

$$x \leq |x|$$

para todo real x.

También se sigue directamente de la definición que

$$|x^2| = x^2 \quad \text{y} \quad |x|^2 = x^2$$

para todo real x.

Por otra parte, tenemos que si b es un número real y r es un número positivo, la condición $|b| < r$ significa $-r < b < r$. Esta equivalencia entre ambas expresiones la utilizaremos más adelante.

A continuación establecemos algunas de las propiedades más importantes del valor absoluto.

Teorema

El valor absoluto tiene las siguientes propiedades:

1. Para todo real x se tiene $|x| \geq 0$. Además, $|0| = 0$ y $x = 0$ es el único real x que cumple $|x| = 0$.
2. Para todo real x, se tiene $|-x| = |x|$.
3. Para cualesquiera reales x, y, se tiene $|xy| = |x||y|$.
4. Para cualesquiera reales x, y, con $y \neq 0$, se tiene $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.
5. Para cualesquiera reales x, y, se cumple la desigualdad $|x + y| \leq |x| + |y|$, conocida como **desigualdad del triángulo**.

Demostración

Los incisos 1 y 2 son obvios, razón por la cual demostremos los demás incisos (3, 4 y 5).

Prueba del inciso 3. Supongamos $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Entonces, tenemos $|xy| = xy$. Además, también tenemos $|x| = x$ y $|y| = y$. Por tanto, en este caso $|xy| = xy = |x||y|$. Supongamos ahora $x \leq 0$ y $y \leq 0$. En este caso, también $|xy| = xy$, pues $xy \geq 0$. Por otra parte, $|x| = -x$ y $|y| = -y$, de donde $|x||y| = (-x)(-y) = xy$. Por tanto, también tenemos $|xy| = xy = |x||y|$. Para completar todos

los casos supongamos uno de los dos x o y mayor o igual a cero y el otro negativo, por ejemplo $x \geq 0$ y $y < 0$. En este caso tenemos $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$. Esto prueba el inciso 3.

La prueba del inciso 4 es similar a la anterior y se deja como ejercicio para el lector.

Prueba del inciso 5. Por una parte, tenemos

$$\begin{aligned}|x+y|^2 &= (x+y)^2\\ &= x^2 + 2xy + y^2\\ &= |x|^2 + 2xy + |y|^2\end{aligned}$$

Además, como $xy \leq |xy| = |x||y|$ tenemos

$$\begin{aligned}|x|^2 + 2xy + |y|^2 &\leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2\\ &= (|x| + |y|)^2\end{aligned}$$

De donde obtenemos

$$|x+y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$$

Como $|x+y| \geq 0$ y $|x| + |y| \geq 0$, podemos concluir

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Esto prueba la desigualdad del triángulo, con lo cual, por tanto, completamos la demostración del teorema.

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Dado un número real, hemos definido su valor absoluto $|x|$ como el real mismo si es positivo o cero y como $-x$ si x es negativo. Una alternativa para esta definición es

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Esto es posible debido a que se conviene en matemáticas que para todo real $a > 0$, el símbolo $\sqrt{a}$ representa la raíz positiva de a. Si bien, todo real positivo a tiene dos raíces cuadradas, el símbolo $\sqrt{a}$ representa sólo la raíz positiva, así que las dos raíces son $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$. En forma breve, las dos raíces se escriben $\pm\sqrt{a}$.

Usando la fórmula $|x| = \sqrt{x^2}$, podemos abreviar algunas demostraciones; por ejemplo, tenemos

$$\begin{aligned}|xy| &= \sqrt{(xy)^2}\\ &= \sqrt{x^2y^2}\\ &= \sqrt{x^2}\sqrt{y^2}\\ &= |x||y|\end{aligned}$$

También tenemos

$$\begin{aligned}\left|\frac{x}{y}\right| &= \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} \\ &= \frac{|x|}{|y|}\end{aligned}$$

1.13 Intervalos, vecindades y distancias

1.13.1 Diversos tipos de intervalos

Para el estudio de las funciones, con frecuencia recurriremos a los intervalos que son subconjuntos de los reales. Los hay de diversos tipos, algunos de los cuales son de especial importancia en el análisis de las funciones. A continuación describimos las diferentes clases de intervalos.

- Si a y b son dos números reales con $a < b$, el **intervalo abierto** (a, b) consiste de todos los reales x que satisfacen $a < x < b$.
- Si a es un número real, el **intervalo abierto** $(a, +\infty)$ consiste de todos los reales x que satisfacen $a < x$.
- Si b es un número real, el **intervalo abierto** $(-\infty, b)$ consiste de todos los reales x que satisfacen $x < b$.
- Si a y b son dos números reales con $a \leq b$, el **intervalo cerrado** $[a, b]$ consiste de todos los reales x que satisfacen $a \leq x \leq b$.
- Si a es un número real, el **intervalo cerrado** $[a, +\infty)$ consiste de todos los reales x que satisfacen $a \leq x$.
- Si b es un número real, el **intervalo cerrado** $(-\infty, b]$ consiste de todos los reales x que satisfacen $x \leq b$.
- Si a y b son dos números reales con $a < b$, los intervalos semiabiertos o semicerrados, $[a, b)$ y $(a, b]$, están definidos, respectivamente, por las desigualdades $a \leq x < b$ y $a < x \leq b$.

Observemos que un intervalo cerrado de la forma $[a, a]$ consiste sólo del punto a. Algunas veces, hablaremos del intervalo abierto (a, a), lo cual significa el conjunto vacío. Estos intervalos los llamaremos intervalos degenerados.

Ahora veamos el concepto de distancia entre dos reales. Si x y y son dos números reales, el valor absoluto de su diferencia $|x - y|$, representa, de manera geométrica, la distancia entre los puntos de la recta real correspondientes a los reales x y y, respectivamente. La distancia es entre los puntos, los cuales son entes geométricos, pero también vamos a referirnos a $|x - y|$ como la distancia entre los reales x y y.

Definición

Si x y y son dos reales cualesquiera, la distancia de x a y se define como $|x - y|$.

En el siguiente teorema establecemos una de las propiedades más importantes del concepto distancia.

Teorema

Para cualesquiera reales x, y, z se cumple la desigualdad

$$|x - y| \leq |x - z| + z - y|$$

Esta desigualdad es conocida como **desigualdad del triángulo** para la distancia.

Demostración

La prueba se sigue inmediatamente de las propiedades del valor absoluto:

$$\begin{aligned} |x - y| &= |(x - z) + (z - y)| \\ &\leq |x - z| + |(z - y| \end{aligned}$$

1.13.1.1 Intervalo abierto con centro x_0 y radio $r > 0$

Sean x_0 un número real cualquiera y $r > 0$. El **intervalo abierto con centro** x_0 y **radio** $r > 0$ es el intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$, que consiste de todos los reales x que satisfacen la desigualdad

$$x_0 - r < x < x_0 + r$$

Esta desigualdad también se escribe

$$-r < x - x_0 < r$$

la cual equivale a la desigualdad

$$|x - x_0| < r$$

Entonces tenemos que el intervalo abierto $(x_0 - r, x_0 + r)$ con centro x_0 y radio $r > 0$ consiste de los puntos x que satisfacen la desigualdad $|x - x_0| < r$. En otras palabras, consiste de los puntos x cuya distancia a su centro x_0 es menor que r.

La equivalencia de las tres desigualdades anteriores es tan importante que merece se consigne en una proposición.

Proposición

Si x_0 es cualquier real y r es positivo, entonces las siguientes desigualdades son equivalentes entre sí:

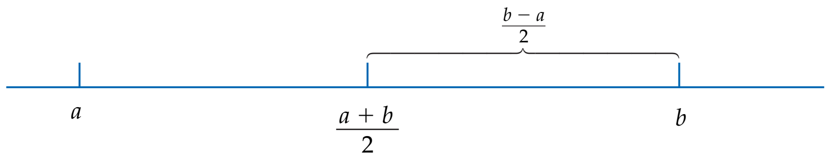
a) $x_0 - r < x < x_0 + r$

b) $-r < x - x_0 < r$

c) $|x - x_0| < r$

Dicho de otra manera, cualesquiera de las desigualdades anteriores puede usarse para caracterizar los puntos del intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$.

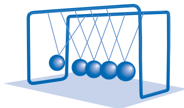
Los intervalos abiertos de la forma $(x_0 - r, x_0 + r)$ son muy socorridos en pruebas de teoremas de cálculo, sin embargo, todo intervalo abierto (a, b) puede verse como un intervalo de esta forma, con centro el punto $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$ y radio $r = \dfrac{b-a}{2}$.



Para finalizar este capítulo, establecemos el concepto de vecindad de un punto.

Sea x_0 un número real, una **vecindad abierta** de x_0 es cualquier intervalo abierto (a, b) que lo contenga; el punto x_0 no necesariamente es el centro de la vecindad (a, b), aunque ciertamente puede serlo. Es una obviedad que cualquier intervalo abierto (a, b) es una vecindad abierta de cualquiera de sus puntos. Por ejemplo, el intervalo abierto $(0, 1)$ es una vecindad abierta de $\frac{1}{2}$, pero también es una vecindad abierta de $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$. El intervalo abierto $(0, 1)$ es vecindad abierta de cualquier real $0 < x_0 < 1$. A un intervalo de la forma $(x_0 - r, x_0 + r)$ le llamaremos vecindad abierta con centro x_0 y radio r. Esta terminología nos ayudará a hacer más fluidas nuestras demostraciones.

1.14 Problemas y ejercicios



Números racionales

I. Determine la expansión decimal de los siguientes números.

1. $\frac{3}{8}$

2. $\frac{4}{11}$

3. $\frac{127}{66}$

4. $\frac{23}{99}$

5. $\frac{1}{16}$

6. $\frac{1}{17}$

7. $\frac{m}{99}$ con m natural de 2 o menos cifras.

II. Escriba los siguientes números racionales en la forma $\frac{p}{q}$.

8. 1.75

9. 5.125

10. 1.4142

11. $10.10\overline{10} = 10.101010\ldots$

12. $1.\overline{75}$

13. $1.\overline{4142} = 1.41424142$

14. $1.41\overline{42}$

15. $2.0111\overline{1} = 2.01111\ldots$

16. $3.04518\overline{18} = 3.045181818$

17. $0.\overline{101}$

18. 0.03125

19. $0.4\overline{9}$

20. $1.\overline{345}$

21. 2.505

22. $0.\overline{0123456789}$

23. $0.11\overline{9}$

Números irracionales

24. Pruebe que $\sqrt{5}$ es irracional.

25. Sabiendo que $\sqrt{5}$ es irracional, pruebe que $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ es irracional.

26. Demuestre que $\sqrt{p}$ es irracional, si p es primo.

27. Pruebe que si a es número racional y b es un número irracional, entonces $a + b$ es irracional.

28. Pruebe que si a es un número racional diferente de cero y b es un número irracional, entonces el producto ab es irracional.

29. Demuestre con un ejemplo que la suma de dos números irracionales, no es necesariamente irracional.

30. Demuestre con un ejemplo que el producto de dos números irracionales no es necesariamente irracional.

31. Considere la "ecuación formal" con un número infinito de radicales

$$x = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots}}}}$$

¿Cuál es el valor de x?